ГЕОМЕТРИЯ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

для 8, 9 классов

ПРОСВЕЩЕНИЕ · 1971

А. П. КИСЕЛЁВ, Н. А. РЫБКИН

ГЕОМЕТРИЯ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

для 8, 9 классов

ИЗДАНИЕ 7-е

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1971

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемое пособие содержит материал, соответствующий программе, для VIII класса по темам: «Свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника» и «Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике и круге», а для IX класса по теме «Последовательности». Этот материал взят из учебника А. П. Киселёва «Геометрия», ч. 1, Учпедгиз, 1962 г., а упражнения — из задачника Н. А. Рыбкина «Сборник задач по геометрии», ч. I, «Просвещение», 1964 г.

Содержание параграфов взято из указанных выше книг без изменений, за исключением следующих: ссылки на предложения предыдущих параграфов учебника заменены формулировкой соответствующих предложений, § 237 заменён новым (§ 21), в § 33 (269) внесено уточнение.

В целях возможного использования полных изданий учебника А. П. Киселёва и задачника Н. А. Рыбкина в настоящем пособии введена двойная нумерация параграфов учебника и номеров задач из § 8 задачника. В скобках указана старая нумерация.

Данное пособие подготовлено к изданию К. П. Сикорским.

6-6

ВОСЬМОЙ КЛАСС

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ ВНУТРЕННЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА

1. (186.) Теорема[1]. ***Биссектриса*** (BD, черт. 1) ***любого угла треугольника*** (ABC) ***делит противоположную сторону на части*** (AD и CD), ***пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.***

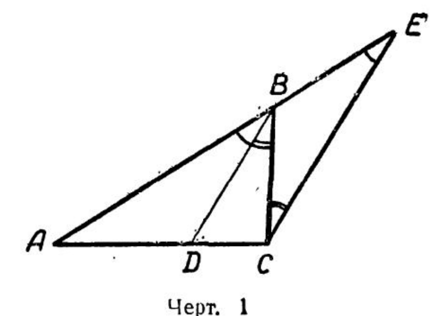
Требуется доказать, что если $\angle ABD = \angle DBC$, то $AD : DC = AB : BC$.

Проведём $CE \parallel BD$ до пересечения в точке E с продолжением стороны AB. Тогда, согласно теореме о пропорциональности отрезков, образующихся на прямых, пересечённых несколькими параллельными прямыми, будем иметь пропорцию:

$$AD : DC = AB : BE.$$

Чтобы от этой пропорции перейти к той, которую требуется доказать, достаточно обнаружить, что $BE = BC$, т. е. что $\triangle BCE$ равнобедренный. В этом треугольнике $\angle E = \angle ABD$ (как углы соответственные при параллельных прямых) и $\angle BCE = \angle DBC$ (как углы накрест лежащие при тех же параллельных прямых).

Но $\angle ABD = \angle DBC$ по условию; значит, $\angle E = \angle BCE$, а потому равны и стороны BE и BC, лежащие против равных углов. Теперь, заменив в написанной выше пропорции BE на BC, получим ту пропорцию, которую требуется доказать.



Черт. 1

Численный пример. Пусть $AB = 10$; $BC = 7$ и $AC = 6$. Тогда, обозначив AD буквой x, можем написать пропорцию:

$$x : (6 - x) = 10 : 7,$$

---

[1] В скобках здесь и дальше указаны номера параграфов по книге А. П. Киселёва «Геометрия». Учебник для 6—9 классов семилетней и средней школы, часть I, Учпедгиз, 1962.

отсюда найдём:

$$7x = 60 - 10x;\ 7x + 10x = 60;\ 17x = 60;$$
$$x = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17}.$$

Следовательно,

$$DC = 6 - x = 6 - 3\frac{9}{17} = 2\frac{8}{17}.$$

Задачи из § 8[1].

Свойство биссектрисы в треугольнике.

1. (17.) BD — биссектриса угла в треугольнике ABC. Требуется определить:

1) отрезки AD и DC, если $AB = 10$ *м*, $BC = 15$ *м* и $AC = 20$ *м*;

2) сторону BC, если $AD : DC = 8 : 5$ и $AB = 16$ *м*;

3) сторону AC, если $AB : BC = 2 : 7$ и $DC - AD = 1$ *м*.

2. (18.) Угол треугольника, заключённый между сторонами в 9 *см* и 6 *см*, разделён пополам. Один из отрезков третьей стороны оказался равным одной из данных сторон. Определить третью сторону.

3. (20.) В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC. Определить отрезки BE и EC, если $AB = 14$ *см*, $BC = 12$ *см* и $AC = 10$ *см*.

4. (21.) Стороны треугольника равны 51 *см*, 85 *см* и 104 *см*. Проведена окружность, которая касается обеих меньших сторон, а центр имеет на большей стороне. На какие части бо́льшая сторона делится центром?

5. (22.) В равнобедренном треугольнике высота равна 20 *см*, а основание относится к боковой стороне, как 4 : 3. Определить радиус вписанного круга.

6. (23.) В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12 : 5, а боковая сторона равна 60 *см*. Определить основание.

7. (24.) В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56 *см*. Определить его стороны.

8. (25.) Хорда $AB = 15$ *м*, хорда $AC = 21$ *м* и хорда $BC = 24$ *м*. Точка D — середина дуги CB. На какие части BE и EC делится хорда BC прямой AED?

---

[1] В скобках в этом параграфе указаны номера задач из книги Н. Рыбкина «Сборник задач по геометрии для 6—9 классов средней школы», часть I, Планиметрия, «Просвещение», 1964. В ответах к задачам указаны номера только по задачнику.

9. (26.) В треугольнике ABC даны стороны a, b и c. BD — биссектриса угла B; O — точка пересечения BD и биссектрисы угла C. Требуется определить отношение $OD : OB$.

10. (27.) В треугольнике ABC сторона $AB = 15$ *см* и $AC = 10$ *см*; AD — биссектриса угла A; из точки D проведена прямая, параллельная AB, до пересечения с AC в точке E. Определить AE, EC и DE.

11. (28.) В равнобедренном треугольнике ABC сторона $AC = b$, сторона $BA = BC = a$; AN и CM — биссектрисы углов A и C. Определить длину MN.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

2. (188.) Теорема. ***В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.***

Пусть AD (черт. 2) есть перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла A на гипотенузу BC. Требуется доказать следующие три пропорции:

$$1)\ \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC};\quad 2)\ \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD};\quad 3)\ \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$$

Первую пропорцию мы докажем из подобия треугольников ABD и ADC. Эти треугольники подобны, потому что

$$\angle 1 = \angle 4 \text{ и } \angle 2 = \angle 3$$

как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Возьмём в $\triangle ABD$ те стороны BD и AD, которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AD и DC[1], поэтому

$$BD : AD = AD : DC.$$

Вторую пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ABD. Эти треугольники подобны, потому что они прямоугольные

---

[1] Чтобы безошибочно определить, какие стороны взятых треугольников сходственны между собой, полезно держаться такого пути:

1) указать углы, против которых лежат взятые стороны одного треугольника;

2) найти равные им углы в другом треугольнике;

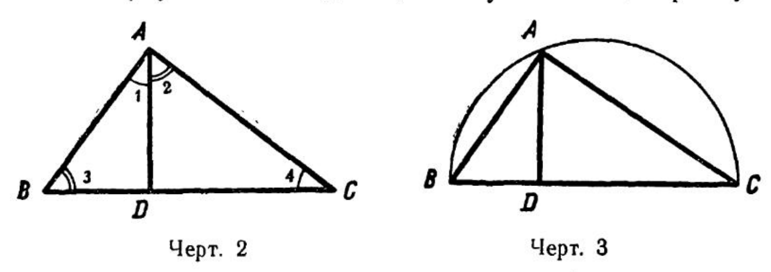
3) взять противолежащие им стороны.

Например, для треугольников ABD и ADC рассуждаем так: в треугольнике ABD стороны BD и AD лежат против углов *1* и *3*; в треугольнике ADC этим углам равны *4* и *2*; против них лежат стороны AD и DC. Значит, стороны AD и DC сходственны со сторонами BD и AD.

и острый угол B у них общий. В $\triangle ABC$ возьмём те стороны BC и AB, которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ABD$ будут AB и BD; поэтому

$$BC : AB = AB : BD.$$

Третью пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ADC. Эти треугольники подобны, потому что они оба прямоугольные и имеют общий острый угол C. В $\triangle ABC$ возьмём стороны BC и AC; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AC и DC; поэтому



Черт. 2 Черт. 3

$$BC : AC = AC : DC.$$

3. (189.) Следствие. Пусть A (черт. 3) есть произвольная точка окружности, описанной на диаметре BC. Соединив концы диаметра с этой точкой, мы получим прямоугольный $\triangle ABC$, у которого гипотенуза есть диаметр, а катеты суть хорды (по свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр). Применяя доказанную выше теорему к этому треугольнику, приходим к следующему заключению:

Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр, а хорда, соединяющая эту точку с концом диаметра, есть средняя пропорциональная между диаметром и прилежащим к хорде отрезком диаметра.

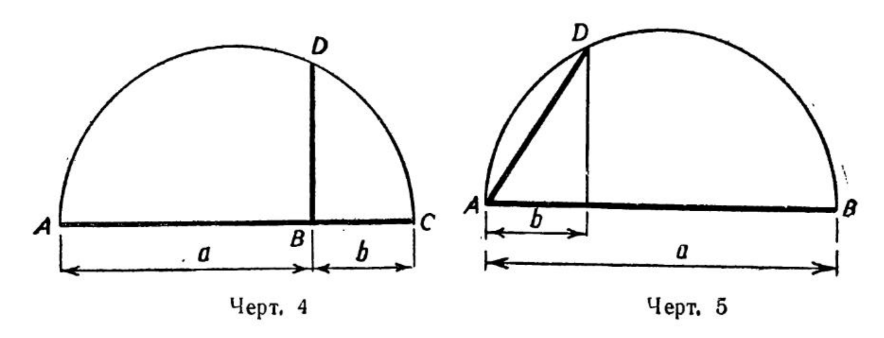
4. (190.) Задача. *Построить отрезок, средний пропорциональный между двумя отрезками a и b.*

Задачу эту можно решить двояким путём:

1) На произвольной прямой (черт. 4) откладываем отрезки $AB = a$ и $BC = b$; на AC, как на диаметре, описываем полуокружность; из B восставляем до пересечения с окружностью перпендикуляр BD. Этот перпендикуляр и есть искомая средняя пропорциональная между AB и BC.

2) На произвольной прямой (черт. 5) откладываем от точки A отрезки a и b. На большем из этих отрезков описываем полуокружность. Проведя из конца меньшего отрезка перпендикуляр к AB до пересечения его с окружностью в точке D, соединяем A с D. Хорда AD есть средняя пропорциональная между a и b.

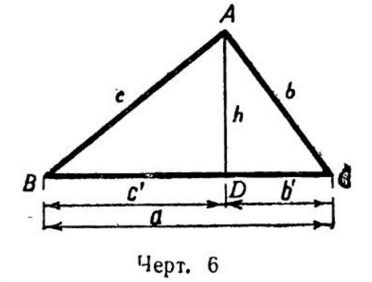
5. (191.) Теорема Пифагора. Доказанные выше теоремы позволяют обнаружить замечательное соотношение между сторонами любого прямоугольного треугольника. Это соотношение было впервые замечено греческим геометром Пифагором (VI в. до н. э.) и носит поэтому его имя — теорема Пифагора.



Черт. 4 Черт. 5

Если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей, то квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Пусть ABC (черт. 6) есть прямоугольный треугольник, AD — перпендикуляр, опущенный на гипотенузу из вершины прямого угла. Положим, что стороны и отрезки гипотенузы измерены одной и той же единицей, причём получились числа a, b, c, c' и b' (принято длины сторон треугольника обозначать малыми буквами, соответствующими большим буквам, которыми обозначены противолежащие углы). Применяя теорему § 2 (188), можем написать пропорции:



Черт. 6

$$a : c = c : c' \quad \text{и} \quad a : b = b : b',$$

откуда

$$ac' = c^2 \text{ и } \quad ab' = b^2.$$

Сложив почленно эти два равенства, найдём:

$$ac' + ab' = c^2 + b^2, \quad \text{или} \quad a(c' + b') = c^2 + b^2.$$

Но $c' + b' = a$, следовательно,

$$a^2 = c^2 + b^2.$$

Эту теорему обыкновенно выражают сокращённо так: ***квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов***[1].

---

[1] Теорема Пифагора имеет ещё другую формулировку: площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Пример. Положим, что катеты, измеренные какой-нибудь линейной единицей, выражаются числами 3 и 4; тогда гипотенуза в той же единице выразится числом x, удовлетворяющим уравнению:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ откуда } x = \sqrt{25} = 5.$$

Замечание. Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 называется часто египетским треугольником, так как он был известен ещё древним египтянам. Так, их землемеры для построения прямого угла на земной поверхности пользовались таким приёмом: бечёвку посредством узлов они разделяли на 12 равных частей; затем, связав концы, натягивали её на земле (посредством кольев) в виде треугольника со сторонами в 3,4 и 5 делений; тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямым[1].

6. (192.) Следствие. *Квадраты катетов относятся между собой, как прилежащие отрезки гипотенузы.* Действительно, из уравнений предыдущего параграфа находим:

$$c^2 : b^2 = ac' : ab' = c' : b'$$

7. (193.) Замечание. К трём равенствам, которые мы вывели выше:

$$1)\ ac' = c^2;\ 2)\ ab' = b^2 \text{ и } 3)\ a^2 = b^2 + c^2,$$

можно присоединить ещё следующие два:

$$4)\ b' + c' = a \text{ и } 5)\ h^2 = b'c'$$

(если буквой h обозначим длину высоты AD). Из этих равенств третье, как мы видели, составляет следствие первых двух и четвёртого, так что из пяти равенств только четыре независимы; вследствие этого можно по данным двум из шести чисел находить остальные четыре.

Для примера положим, что нам даны отрезки гипотенузы $b' = 5$ *м* и $c' = 7$ *м*; тогда

$$a = b' + c' = 12;\ c = \sqrt{ac'} = \sqrt{12 \cdot 7} = \sqrt{84} = 9,165 \ldots$$

$$b = \sqrt{ab'} = \sqrt{12 \cdot 5} = \sqrt{60} = 7,745 \ldots$$

$$h = \sqrt{c'b'} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35} = 5,916 \ldots$$

---

[1] Прямоугольные треугольники, у которых стороны измеряются целыми числами, носят название пифагоровых треугольников. Можно доказать, что катеты x и y и гипотенуза z таких треугольников выражаются следующими формулами:

$$x = 2ab,\ y = a^2 - b^2,\ z = a^2 + b^2,$$

где a и b — произвольные целые числа при условии, что $a > b$.

Задачи из § 10.

В прямоугольном треугольнике обозначают: a и b — катеты; c — гипотенуза; a_c и b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу; h — высота из вершины прямого угла. Предполагается, что отрезки измерены одной и той же единицей.

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.

1. Вычислить гипотенузу, если даны оба катета:
1) 12 *см* и 35 *см*; 2) 56 *см* и 33 *см*;
3) 4 *м* и 9 *дм*; 4) 60 *см* и 91 *см*;
5) 21 и $3\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{2}$ и $\frac{7}{16}$;
7) 16,8 и 2,6; 8) 5 и 6.

2. Вычислить второй катет, если даны гипотенуза и первый катет[1]:
1) 289 и 240; 2) 269 и 69; 3) 145 и 143;
4) 42,5 и 6,5; 5) 17 и $15\frac{2}{5}$; 6) 10 и 7.

3. По двум данным элементам прямоугольного треугольника вычислить остальные четыре:

1) $a = 15$, $b = 20$; 2) $a = 24$, $b = 7$; 3) $a = 4$, $b = 5$;
4) $a = 100$, $c = 125$; 5) $b = 65$, $c = 169$; 6) $a = 600$, $c = 625$;
7) $a = 6$, $a_c = 3{,}6$; 8) $b = 7$, $b_c = 1{,}96$;
9) $c = 29$, $a_c = 15\frac{6}{29}$; 10) $c = 3$, $b_a = 2$;
11) $a_c = 1\frac{1}{2}$; $b_c = 2\frac{2}{3}$; 12) $a_c = 2$, $b_c = 18$;
13) $a = 136$, $h = 120$; 14) $b = 9$, $h = 8\frac{32}{41}$.

4. По данной сумме двух отрезков и среднему пропорциональному этих отрезков построить отрезки.

5. По данной разности двух отрезков и среднему пропорциональному этих отрезков построить отрезки.

6. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $ab = ch$.

7. Катеты относятся, как 5 : 6, гипотенуза равна 122 *см*. Найти отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой.

8. Катеты относятся, как 3 : 2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 *м* больше другого. Определить гипотенузу.

9. Катеты относятся, как 3: 7, а высота, проведённая на гипотенузу, равна 42 *см*. Определить отрезки гипотенузы.

---

[1] В задаче **2** и во многих других случаях выгодно при вычислении разность квадратов заменять произведением суммы на разность.

10. Доказать, что диаметр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, есть средняя пропорциональная между параллельными сторонами трапеции.

11. Доказать, что отношение квадратов катетов равно отношению их проекций на гипотенузу.

12. 1) Построить два отрезка, квадраты которых относятся, как $m : n$.

2) Построить два отрезка, которые относились бы, как квадраты двух данных отрезков.

Теорема Пифагора

13. Узнать, какими тремя последовательными целыми числами могут выражаться стороны прямоугольного треугольника.

14. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый жёлоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 *м*, а концы жёлоба расположены на высоте 8 *м* и 4 *м* над землёй. Определить длину жёлоба.

15. 1) Точка внутри прямого угла удалена от его сторон на расстояния a и b. Найти её расстояние от вершины.

2) Стороны прямоугольника равны 60 *см* и 91 *см*. Чему равна его диагональ?

16. Требуется выфрезовать квадратную головку со стороной 32 *мм*. Чему должен быть равен наименьший диаметр круглого железа, годного для этой цели?

17. 1) Сторона квадрата равна a. Чему равна его диагональ?

2) Определить сторону квадрата, если она меньше диагонали на 2 *см*.

18. Диаметр бревна 12 *см*. Можно ли из этого бревна вытесать квадратный брус со стороной 10 *см*?

19. 1) Стороны прямоугольника равны a и b. Определить радиус описанного круга.

2) В круг вписан прямоугольник, стороны которого относятся, как 8 : 15. Определить эти стороны, если радиус круга равен 34 *см*.

20. 1) Катеты прямоугольного треугольника равны 8 *дм* и 18 *см*. Определить радиус описанного круга.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 16 *см* и 12 *см*. Определить медиану гипотенузы.

21. 1) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 17 *см*, а основание 16 *см*. Определить высоту.

2) Определить стороны равнобедренного треугольника, если его высота равна 35 *см*, а основание относится к боковой стороне, как 48 : 25.

3) В равнобедренном треугольнике основание равно 4 *см*, а угол при нём равен 45°. Определить боковую сторону.

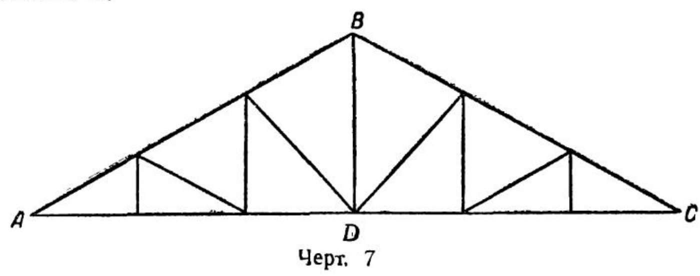
22. Стропильная ферма (черт. 7) имеет ноги AB и CB по 9 *м* и пролёт AC в 15 *м*. Определить высоту фермы BD.

23. 1) Биссектриса прямого угла делит гипотенузу прямоугольного треугольника на части, равные $2\frac{1}{7}$ *м* и $2\frac{6}{7}$ *м*. Определить катеты.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 15 *см* и 20 *см* Из вершины прямого угла проведены высота и биссектриса. На какие отрезки разделилась гипотенуза?

24. 1) В равностороннем треугольнике определить высоту по данной стороне a.

2) В равностороннем треугольнике определить сторону по данной высоте h.



Черт. 7

3) В равностороннем треугольнике высота меньше стороны на m. Определить сторону.

4) В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, а больший катет равен 6 *см*. Определить две другие стороны этого треугольника.

25. 1) Боковые стороны треугольника равны: $a = 25$ *см* и $b = 30$ *см*, а высота $h_c = 24$ *см*. Определить основание c.

2) В треугольнике больший угол при основании равен 45°, а высота делит основание на части в 20 *см* и 21 *см*. Определить большую боковую сторону.

3) Из одной точки проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Определить длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 *см* и 50 *см*, а их проекции на данную прямую относятся, как 3 : 10.

26. 1) Диагонали ромба равны 24 *см* и 70 *см*. Определить сторону.

2) Определить диагонали ромба, если они относятся, как 3 : 4, а периметр равен 1 *м*.

27. 1) В равнобедренной трапеции основания равны 10 *см* и 24 *см*, боковая сторона 25 *см*. Определить высоту трапеции.

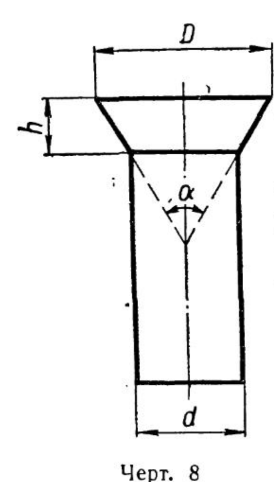
2) В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 41 *см*, высота равна 4 *дм* и средняя линия 45 *см*. Определить основание.

28. Параллельно прямой дороге, на расстоянии 500 *м* от неё, расположена цепь стрелков; расстояние между крайними стрелками равно 120 *м*, дальность полёта пули равна 2,8 *км*. Какой участок дороги находится под обстрелом этой цепи?

29. На чертеже 8 изображена заклёпка ОСТ 302 (ОСТ — общесоюзный стандарт) с потайной головкой. Угол $\alpha = 60°$. Вычислить:

1) D, если $d = 16{,}5$ *мм* и $h = 7{,}5$ *мм*;
2) d, если $D = 30$ *мм* и $h = 9{,}5$ *мм*;
3) h, если $D = 35$ *мм* и $d = 22$ *мм*.

Написать формулу, связывающую между собой D, d и h.



Черт. 8

30. 1) В треугольнике ABC проведена высота AD. Доказать, что $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

2) Если M — некоторая точка высоты AD треугольника ABC, то $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$. Доказать.

31. 1) Доказать, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

2) В прямоугольной трапеции меньшая диагональ равна наклонной боковой стороне. Определить большую диагональ, если наклонная боковая сторона равна a, а меньшее основание равно b.

32. Из листа железа требуется выштамповать круглые шайбы диаметром в 28 *мм*. Найти расстояние между прямыми, на которых следует расположить центры шайб (черт. 9).

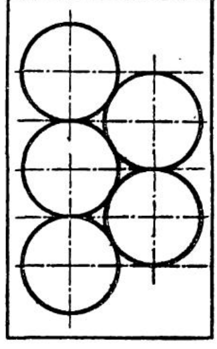
33. 1) Радиус круга равен 89 *дм*, хорда 16 *м*. Определить её расстояние от центра.

2) O — центр; ACB — хорда; OCD — радиус, перпендикулярный к ней, $OC = 9$ *см* и $CD = 32$ *см*. Определить хорду.

3) Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 *см* и 15 *см*, а общая хорда равна 24 *см*. Определить расстояние между центрами.

4) AB и CD — две параллельные хорды, расположенные по разные стороны от центра O окружности радиуса $R = 15$ *см*. Хорда $AB = 18$ *см*, хорда $CD = 24$ *см*. Определить расстояние между хордами.

5) Две параллельные хорды AB и CD расположены по одну сторону от центра O окружности радиуса $R = 30$ *см*. Хорда $AB = 48$ *см*, хорда $CD = 36$ *см*. Определить расстояние между хордами.



Черт. 9

34. Чтобы измерить диаметр большого шкива, установили штангенциркуль так, как показано на чертеже 10. Длина ножек штан-

генциркуля $s = 25$ *мм*, расстояние между концами ножек $l = 200$ *мм*.

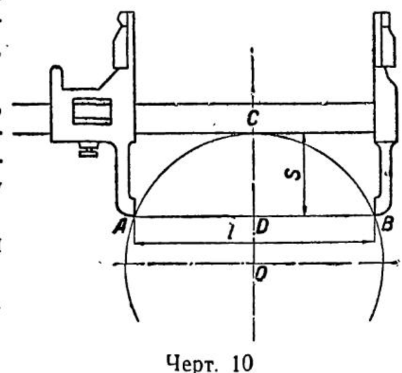
1) Определить длину диаметра;

2) вывести формулу, выражающую зависимость диаметра от s и l.

35. В сегменте хорда равна a, а высота h. Определить радиус круга.

36. Радиус круга равен 25 *см*; две параллельные хорды равны 14 *см* и 40 *см*. Определить расстояние между ними.

37. Расстояния от одного конца диаметра до концов параллельной ему хорды равны 13 *см* и 84 *см*. Определить радиус круга.



Черт. 10

38. 1) К окружности радиуса, равного 36 *см*, проведена касательная из точки, удалённой от центра на 85 *см*. Определить длину касательной.

2) Из общей точки проведены к окружности две касательные. Радиус окружности равен 11 *см*, а сумма касательных равна 120 *см*. Определить расстояние от центра до исходной точки касательных.

3) К окружности радиуса, равного 7 *см*, проведены две касательные из одной точки, удалённой от центра на 25 *см*. Определить расстояние между точками касания.

39. Два круга радиусов R и r внешне касаются. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Определить длину последней касательной.

40. 1) Два круга касаются извне. Определить длину их общей внешней касательной (между точками касания), если радиусы равны 16 *см* и 25 *см*.

2) Радиусы двух кругов равны 27 *см* и 13 *см*, а расстояние между центрами равно 50 *см*. Определить длину общих касательных.

41. Касательная и секущая, проведённые из общей точки к одной окружности, взаимно перпендикулярны. Касательная равна 12 *м*, а внутренняя часть секущей равна 10 *м*. Определить радиус окружности.

42. AB и CD — параллельные прямые. AC — секущая, E и F — точки пересечения прямых AB и CD с биссектрисами углов C и A. Дано: $AF = 96$ *см* и $CE = 110$ *см*. Требуется определить AC.

43. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 32$ *м*, а боковая сторона 20 *м*. Из вершины B проведён перпендикуляр к боковой стороне до пересечения с основанием. На какие части он делит основание?

44. Катет $AC = 15$ *см*; катет $CB = 8$ *см*. Из центра C радиусом CB описана дуга, отсекающая от гипотенузы часть BD, которую и требуется определить.

45. Дуга, описанная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника радиусом, равным меньшему катету, делит гипотенузу на отрезки в 98 *см* и 527 *см* (начиная от меньшего катета). Определить катеты.

46. AB — диаметр круга; BC — касательная; D — точка пересечения прямой AC с окружностью. Дано: $AD = 32$ *см* и $DC = 18$ *см*. Требуется определить радиус.

47. AB — диаметр; BC и CDA — касательная и секущая. Определить отношение $CD : DA$, если BC равна радиусу.

Биссектриса в прямоугольном треугольнике.

48. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении $7 : 9$. В каком отношении (считая части в том же порядке) делит ее высота?

49. Определить катеты, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части в 15 *см* и 20 *см*.

50. В равнобедренном прямоугольном треугольнике катет равен a. На какие части делит его биссектриса противолежащего угла?

51. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки m и n $(m > n)$. Определить другой катет и гипотенузу.

52. В прямоугольном треугольнике, катеты которого равны 15 *дм* и 2 *м*, проведены: высота из вершины прямого угла и биссектрисы обоих углов, образуемых высотой с катетами. Определить отрезок гипотенузы, заключённый между биссектрисами.

53. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = 6$ *см* и гипотенуза $AB = 10$ *см*. Проведены биссектрисы угла ABC и угла, с ним смежного, пересекающие катет AC и его продолжение в точках D и E. Определить длину DE.

54. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона $AB = 10$ *м* и основание $AC = 12$ *м*. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке D. Требуется определить BD.

55. 1) В равнобедренном треугольнике основание равно 30 *см*, а боковая сторона равна 39 *см*. Определить радиус вписанного круга.

2) В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении $17 : 15$. Основание равно 60 *см*. Найти радиус этого круга.

Высота и стороны в прямоугольном треугольнике, ромбе и трапеции.

56. Из точки B проведены к данной прямой перпендикуляр BC и наклонная BA. На AC взята точка D, и прямая BD продолжена до пересечения в точке E с прямой AE, перпендикулярной к AC. Определить AE, если $BA = 53$ *дм*, $AD = 8$ *дм* и $DC = 20$ *дм*.

57. 1) В равнобедренном треугольнике осно-

вание равно 30 *дм*, а высота 20 *дм*. Определить высоту, опущенную на боковую сторону.

2) В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 3 *дм*, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 4 *дм*. Определить стороны этого треугольника.

3) Диагонали ромба равны 14 *дм* и 48 *дм*. Определить его высоту.

58. 1) Гипотенуза $AB = 34$ *см*; катет $BC = 16$ *см*. Определить длину перпендикуляра, восставленного к гипотенузе из её середины до пересечения с катетом AC.

2) Радиус круга равен r. Определить длину хорды, проведённой из конца данного диаметра через середину перпендикулярного к нему радиуса.

59. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 16$ *дм* и катет $BC = 12$ *дм*. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе (причём касательная и треугольник лежат по разные стороны гипотенузы). Катет BC продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определить, на сколько продолжен катет.

60. Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156 *дм*, а расстояние между точками касания равно 120 *дм*. Определить радиус круга.

61. В прямоугольной трапеции основания равны 17 *дм* и 25 *дм*, а бóльшая боковая сторона равна 10 *дм*. Из середины этой стороны проведён перпендикуляр к ней до встречи с продолжением другой боковой стороны. Определить длину этого перпендикуляра.

Смешанные задачи на прямоугольный треугольник.

62. AC и CB — катеты; CD — высота; $DE \parallel BC$. Определить отношение $AE : EC$, если $AC : CB = 4 : 5$.

63. AC и CB — катеты; CD — высота; $DE \perp AC$ и $DF \perp CB$. Определить DE и DF, если $AC = 75$ *дм* и $BC = 100$ *дм*.

64. В двух равнобедренных треугольниках боковые стороны имеют одинаковую длину, а сумма углов при вершинах равна 180°. Основания относятся, как 9 : 40, а длина боковой стороны равна 41 *дм*. Определить основания.

65. 1) В треугольнике основание равно 60 *м*, высота 12 *м* и медиана основания 13 *м*. Определить боковые стороны.

2) В прямоугольном треугольнике найти отношение катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся, как 40 : 41.

66. Определить радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание и боковая сторона треугольника соответственно равны: 1) 6 *дм* и 5 *дм*; 2) 24 *м* и 13 *м*.

67. В прямоугольном треугольнике катеты равны 13 *дм* и 84 *дм*. Определить радиус вписанного круга.

68. Расстояние между центрами двух окружностей, лежащих одна вне другой, равно 65 *дм*; длина их общей внешней касательной

(между точками касания) равна 63 *дм*, длина их общей внутренней касательной равна 25 *дм*. Определить радиус окружностей.

69. Длины двух параллельных хорд равны 40 *дм* и 48 *дм*, расстояние между ними равно 22 *дм*. Определить радиус круга.

70. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, основания равны 36 *см* и 1 *м*. Определить радиус круга.

71. Около круга, радиус которого равен 12 *см*, описана равнобедренная трапеция с боковой стороной в 25 *см*. Определить основания этой трапеции.

72. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны относятся, как $m : n$. Определить стороны этой трапеции.

73. AB и AC — касательные к одному кругу с центром O; M — точка пересечения прямой AO с окружностью; DME — отрезок касательной, проведённой через M между AB и AC. Определить длину DE, если радиус круга равен 15 *дм*, а расстояние $AO = 39$ *дм*.

74. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 *дм* и 20 *дм*. Определить расстояние от центра вписанного круга до высоты, проведённой на гипотенузу.

75. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла опущен перпендикуляр на гипотенузу, и на нём, как на диаметре, описана окружность, которая на катетах CA и CB даёт внутренние отрезки m и n. Определить катеты ($m = 12$; $n = 18$).

76. В прямоугольном треугольнике катеты равны 75 *дм* и 100 *дм*. На отрезках гипотенузы, образуемых высотой, построены полукруги по одну сторону с данным треугольником. Определить отрезки катетов, заключённые внутри этих полукругов.

77. Если два круга имеют внешнее касание, то их общая внешняя касательная есть средняя пропорциональная между их диаметрами. Доказать.

78. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна к основаниям AD и BC; сумма острых углов A и C равна 90°. Основание $AD = a$ и $BC = b$. Определить боковые стороны AB и CD

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ.

8. (199.) Некоторые пропорциональные линии в круге мы указали ранее в § 3 (189); теперь укажем ещё другие.

Теорема. ***Если через точку*** (M, черт. 11)***, взятую внутри круга, проведены какая-нибудь хорда*** (AB) ***и диаметр*** (CD)***, то произведение отрезков хорды*** ($AM \cdot MB$) ***равно произведению отрезков диаметра*** ($MD \cdot MC$)***.***

Проведя две вспомогательные хорды AC и BD, мы получим два треугольника AMC и MBD (покрытые на чертеже штрихами), ко-

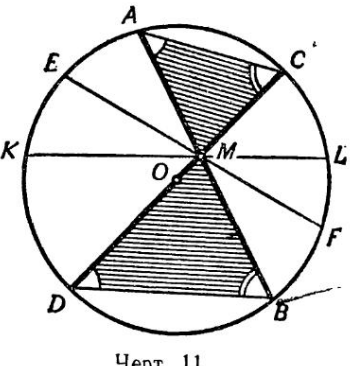
торые подобны, так как у них углы A и D равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC, и углы C и B равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD. Из подобия треугольников выводим:

$$AM : MD = MC : MB,$$

откуда

$$AM \cdot MB = MD \cdot MC.$$

9. (200.) Следствие. *Если через точку* (M, черт. 11), *взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд* (AB, EF, KL, ...), *то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд*, так как для каждой хорды это произведение равно произведению отрезков диаметра CD, проходящего через взятую точку M.



Черт. 11

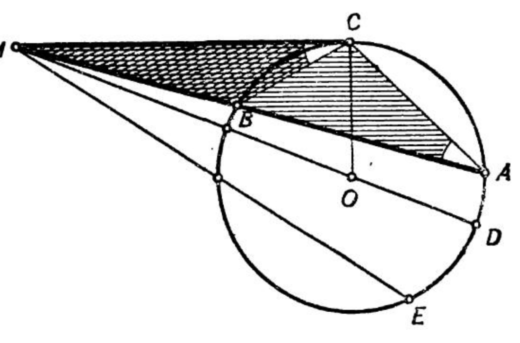
10. (201.) Теорема. ***Если из точки*** (M, черт. 12), ***взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая*** (MA) ***и касательная*** (MC), ***то произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной*** (предполагается, что секущая ограничена второй точкой пересечения, а касательная — точкой касания).

Проведём вспомогательные хорды AC и BC; тогда получим два треугольника MAC и MBC (покрытые на чертеже штрихами), которые подобны, потому что у них угол M общий и углы MCB и CAB равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги BC. Возьмём в $\triangle\ MAC$ стороны MA и MC; сходственными сторонами в $\triangle\ MBC$ будут MC и MB; поэтому

$$MA : MC = MC : MB,$$

откуда

$$MA \cdot MB = MC^2.$$



Черт. 12

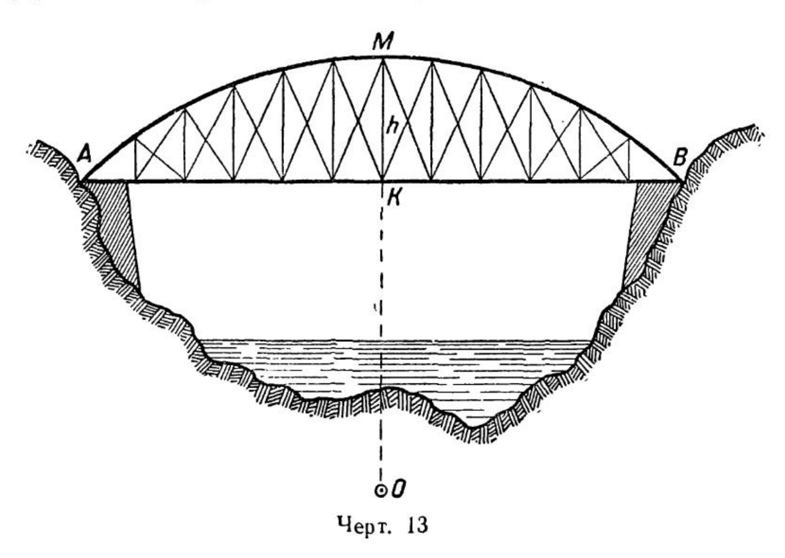
11. (202.) Следствие. *Если из точки* (M, черт. 12), *взятой вне круга, проведены к нему сколько угодно секущих* (MA, MD, ME, ...), *то произведение каждой*

секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное для всех секущих, так как для каждой секущей это произведение равно квадрату касательной (MC^2), проведённой из точки M.

Задачи из § 11.

1. Ферма моста ограничена дугой окружности (черт. 13); высота фермы $MK = h = 3$ *м*; радиус дуги AMB пролёта $R = 8{,}5$ *м*. Вычислить длину AB пролёта моста.

2. В сводчатом подвале, имеющем форму полуцилиндра, надо поставить две стойки, каждую на одинаковом расстоянии от ближайшей стены. Определить высоту стоек, если ширина подвала понизу равна 4 *м*, а расстояние между стойками 2 *м*.



Черт. 13

3. 1) Из точки окружности проведён перпендикуляр на диаметр. Определить его длину при следующей длине отрезков диаметра:

1) 12 *см* и 3 *см*; 2) 16 *см* и 9 *см*; 3) 2 *м* и 5 *дм*.

2) Из точки диаметра проведён перпендикуляр до пересечения с окружностью. Определить длину этого перпендикуляра, если диаметр равен 40 *см*, а проведённый перпендикуляр отстоит от одного из концов диаметра на 8 *см*.

4. Диаметр разделён на отрезки: $AC = 8$ *дм* и $CB = 5$ *м*, и из точки C проведён к нему перпендикуляр CD данной длины. Указать положение точки D относительно круга, когда CD равняется:

1) 15 *дм*; 2) 2 *м*; 3) 23 *дм*.

5. ACB — полуокружность; CD — перпендикуляр на диаметр AB. Требуется:

1) определить DB, если $AD = 25$ и $CD = 10$;
2) определить AB, если $AD : DB = 4 : 9$ и $CD = 30$;
3) определить AD, если $CD = 3AD$, а радиус равен r;
4) определить AD, если $AB = 50$ и $CD = 15$.

6. 1) Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на радиус, равный 34 *см*, делит его в отношении 8 : 9 (начиная от центра). Определить длину перпендикуляра.

2) Хорда BDC перпендикулярна к радиусу ODA. Определить BC, если $OA = 25$ *см* и $AD = 10$ *см*.

3) Ширина кольца, образованного двумя концентрическими окружностями, равна 8 *дм*; хорда большей окружности, касательная к меньшей, равна 4 *м*. Определить радиусы окружностей.

7. С помощью сравнения отрезков доказать, что среднее арифметическое двух неравных чисел больше их среднего геометрического.

8. Построить отрезок, средний пропорциональный между отрезками 3 *см* и 5 *см*.

9. Построить отрезок, равный: $\sqrt{15}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{3}$.

10. ADB — диаметр; AC — хорда; CD — перпендикуляр к диаметру. Определить хорду AC: 1) если $AB = 2$ *м* и $AD = 0{,}5$ *м*; 2) если $AD = 4$ *см* и $DB = 5$ *см*; 3) если $AB = 20$ *м* и $DB = 15$ *м*.

11. AB — диаметр; AC — хорда; AD — её проекция на диаметр AB. Требуется:

1) определить AD, если $AB = 18$ *см* и $AC = 12$ *см*;
2) определить радиус, если $AC = 12$ *м* и $AD = 4$ *м*;
3) определить DB, если $AC = 24$ *см* и $DB = \frac{7}{9} AD$.

12. AB — диаметр; AC — хорда; AD — её проекция на диаметр AB. Требуется:

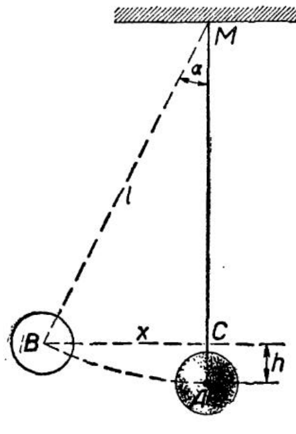
1) определить AC, если $AB = 35$ *см* и $AC = 5AD$;
2) определить AC, если радиус равен r и $AC = DB$.

13. Две хорды пересекаются внутри круга. Отрезки одной хорды равны 24 *см* и 14 *см*; один из отрезков другой хорды равен 28 *см*. Определить второй её отрезок.

14. Мостовая ферма ограничена дугой окружности (черт. 13); длина моста $AB = 6$ *м*, высота $h = 1{,}2$ *м*. Определить радиус дуги ($OM = R$).

15. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке M так, что $MA = 7$ *см*, $MB = 21$ *см*, $MC = 3$ *см* и $MD = 16$ *см*. Лежат ли точки A, B, C и D на одной окружности?

16. Длина маятника $MA = l = 1$ *м* (черт. 14), высота подъёма его, при отклонении на угол α, $CA = h = 10$ *см*. Найти расстояние BC точки B от MA ($BC = x$).



Черт. 14

17. Для перевода железнодорожного пути шириной $b = 1{,}524$ *м* в месте AB (черт. 15) сделано закругление; при этом оказалось, что $BC = a = 42{,}4$ *м*. Определить радиус закругления $OA = R$.

18. Хорда AMB повёрнута около точки M так, что отрезок MA увеличился в $2\frac{1}{2}$ раза. Как изменился отрезок MB?

19. 1) Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 48 *см* и 3 *см*, а другая — пополам. Определить длину второй хорды.

2) Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 12 *м* и 18 *м*, а другая — в отношении 3 : 8. Определить длину второй хорды.

20. Из двух пересекающихся хорд первая равна 32 *см*, а отрезки другой хорды равны 12 *см* и 16 *см*. Определить отрезки первой хорды.

21. Секущая ABC повёрнута около внешней точки A так, что внешний её отрезок AB уменьшился в три раза. Как изменилась длина секущей?

22. Пусть ADB и AEC — две прямые, пересекающие окружность: первая — в точках D и B, вторая — в точках E и C.

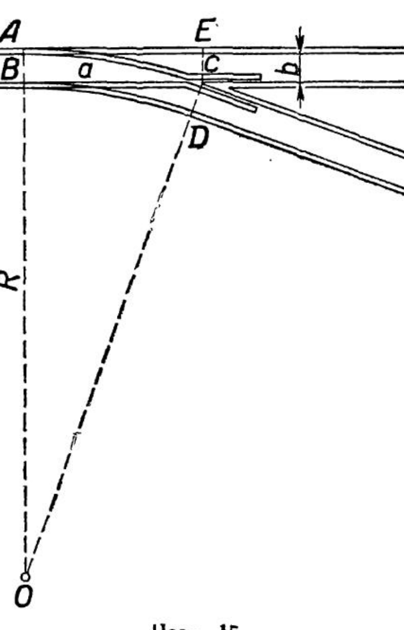
Требуется:

1) определить AE, если $AD = 5$ *см*, $DB = 15$ *см* и $AC = 25$ *см*;

2) определить BD, если $AB = 24$ *м*, $AC = 16$ *м* и $EC = 10$ *м*;

3) определить AB и AC, если $AB + AC = 50$ *м*, а $AD : AE = 3 : 7$.

23. Радиус окружности равен 7 *см*. Из точки, удалённой от центра на 9 *см*, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Определить длину этой секущей.



Черт. 15

24. MAB и MCD — две секущие к одной окружности. Требуется:

1) определить CD, если $MB = 1$ *м*, $MD = 15$ *дм* и $CD = MA$;

2) определить MD, если $MA = 18$ *см*, $AB = 12$ *см* и $MC : CD = 5 : 7$;

3) определить AB, если $AB = MC$, $MA = 20$ и $CD = 11$.

25. Две хорды продолжены до взаимного пересечения. Определить длину полученных продолжений, если хорды равны a и b, а их продолжения относятся, как $m : n$.

26. Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Определить длину касательной, если внешний и внутренний отрезки секущей соответственно выражаются следующими числами: 1) 4 и 5; 2) 2,25 и 1,75, 3) 1 и 2.

27. Касательная равна 20 *см*, а наибольшая секущая, проведённая из той же точки, равна 50 *см*. Определить радиус круга.

28. Секущая больше своего внешнего отрезка в $2\frac{1}{4}$ раза. Во сколько раз она больше касательной, проведённой из той же точки?

29. Общая хорда двух пересекающихся окружностей продолжена, и из точки, взятой на продолжении, проведены к ним касательные. Доказать, что они равны.

30. На одной стороне угла A отложены один за другим отрезки: $AB = 6$ *см* и $BC = 8$ *см*; а на другой стороне отложен отрезок $AD = 10$ *см*. Через точки B, C и D проведена окружность. Узнать, касается ли этой окружности прямая AD, а если нет, то будет ли точка D первой (считая от A) или второй точкой пересечения.

31. Пусть будет: AB — касательная и ACD — секущая той же окружности. Требуется:

1) определить CD, если $AB = 2$ *см* и $AD = 4$ *см*;

2) определить AD, если $AC : CD = 4 : 5$ и $AB = 12$ *см*;

3) определить AB, если $AB = CD$ и $AC = a$.

32. 1) Как далеко видно с воздушного шара (черт. 16), поднявшегося на высоту 4 *км* над землей (радиус земли равен ≈ 6370 *км*)?

2) Гора Эльбрус (на Кавказе) поднимается над уровнем моря на 5600 *м*. Как далеко можно видеть с вершины этой горы?

3) M — наблюдательный пункт высотой h метров над землёй (черт. 17); радиус земли R, $MT = d$ есть наибольшее видимое расстояние. Доказать, что $d = \sqrt{2Rh + h^2}$.

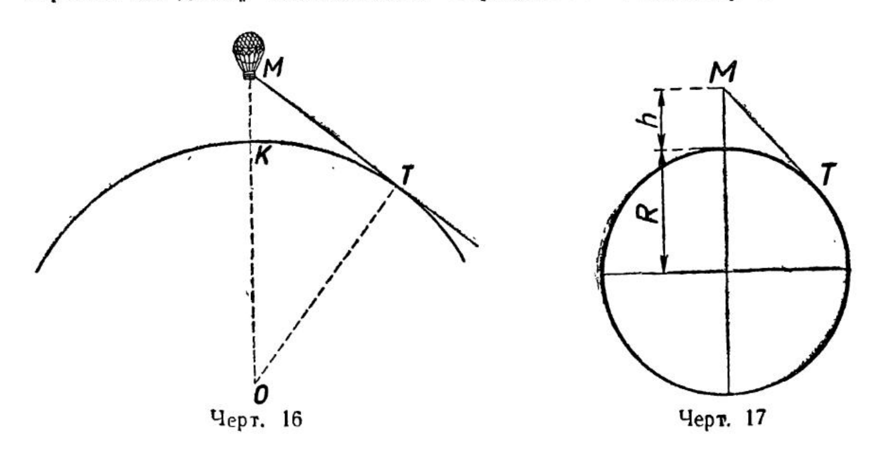
Замечание. Так как h^2 вследствие своей малости сравнительно с $2Rh$ на результат почти не влияет, то можно пользоваться приближённой формулой $d \approx \sqrt{2Rh}$

33. 1) Касательная и секущая, выходящие из одной точки, соответственно равны 20 *см* и 40 *см*; секущая удалена от центра на 8 *см*. Определить радиус круга.

2) Определить расстояние от центра до той точки, из которой выходят касательная и секущая, если они соответственно равны 4 *см* и 8 *см*, а секущая удалена от центра на 12 *см*.

34. 1) Из общей точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить длину касательной, если она на 5 *см* больше внешнего отрезка секущей и на столько же меньше внутреннего отрезка.

2) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Секущая равна a, а её внутренний отрезок больше внешнего отрезка на длину касательной. Определить касательную.



Черт. 16 Черт. 17

35. Из одной точки проведены к одной окружности касательная и секущая. Касательная больше внутреннего и внешнего отрезков секущей соответственно на 2 *см* и 4 *см*. Определить длину секущей.

36. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить их длину, если касательная на 20 *см* меньше внутреннего отрезка секущей и на 8 *см* больше внешнего отрезка.

37. 1) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 30 *см*, а внутренний отрезок секущей на 2 *см* меньше касательной. Определить секущую и касательную.

2) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 15 *см*, а внешний отрезок секущей на 2 *см* меньше касательной. Определить секущую и касательную.

38. Отрезок AB продолжен на расстояние BC. На AB и AC, как на диаметрах, построены окружности. К отрезку AC в точке B проведён перпендикуляр BD до пересечения с большей окружностью. Из точки C проведена касательная CK к меньшей окружности. Доказать, что $CD = CK$.

39. К данной окружности проведены две параллельные касательные и третья касательная, пересекающая их. Радиус есть средняя пропорциональная между отрезками третьей касательной. Доказать.

40. Даны две параллельные прямые на расстоянии 15 *дм* одна от другой; между ними дана точка M на расстоянии 3 *дм* от одной из них. Через точку M проведена окружность, касательная к обеим параллелям. Определить расстояние между проекциями центра и точки M на одну из данных параллелей.

41. В круг радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма высоты и основания равна диаметру круга. Определить высоту.

42. Определить радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника:

1) если основание равно 16 *см*, а высота 4 *см*;

2) если боковая сторона равна 12 *дм*, а высота 9 *дм*;

3) если боковая сторона равна 15 *м*, а основание 18 *м*.

43. В равнобедренном треугольнике основание равно 48 *дм*, а боковая сторона равна 30 *дм*. Определить радиусы кругов, описанного и вписанного, и расстояние между их центрами.

44. Радиус равен r, хорда данной дуги равна a. Определить хорду удвоенной дуги.

45. Радиус окружности равен 8 *дм*; хорда AB равна 12 *дм*. Через точку A проведена касательная, а из точки B — хорда BC, параллельная касательной. Определить расстояние между касательной и хордой BC.

46. Точка A удалена от прямой MN на расстояние a. Данным радиусом r описана окружность так, что она проходит через точку A и касается линии MN. Определить расстояние между полученной точкой касания и данной точкой A.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЁ ЧАСТЕЙ.

12. (226). Предварительное разъяснение. Отрезок прямой можно сравнить с другим отрезком прямой, принятым за единицу, так как прямые линии при наложении совмещаются. Действительно, только по этой причине мы можем установить, какие отрезки прямых считать равными и неравными; что такое сумма отрезков прямой; какой отрезок больше другого в 2, 3, 4, ... раза и т. п. Точно так же дуги окружностей одинакового радиуса можно сравнить между собой вследствие того, что такие дуги при наложении совмещаются. Но так как никакая часть окружности (или другой кривой) не может совместиться с прямой, то нельзя путём наложения установить, какой криволинейный отрезок должно считать равным данному прямолинейному отрезку, а следовательно, и то, какой криволинейный отрезок больше данного прямолинейного в 2, 3, 4, ... раза. Таким образом, является необходимость особо определить, что мы будем подразумевать *под длиной окружности* (или части её), когда сравниваем её с прямолинейным отрезком.

Для этой цели мы должны ввести новое понятие, имеющее исключительно большое значение во всей математике, именно *понятие о пределе*.

Предел числовой последовательности.

13. (227.) Во многих вопросах алгебры и геометрии приходится встречаться с последовательностями чисел, написанных одно за другим по определённому закону. Например, натуральный ряд чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

арифметическая и геометрическая прогрессии, продолженные неограниченно:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots,$$
$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots,$$

представляют собой бесконечные последовательности чисел, или бесконечные числовые последовательности.

Для каждой такой последовательности можно указать правило, по которому составляются её члены. Так, в арифметической прогрессии каждый член разнится от предыдущего на одно и то же

число, в геометрической прогрессии каждый член равен предшествующему, умноженному на некоторое определённое число (знаменатель прогрессии).

Многие последовательности составляются по более сложным правилам. Так, например, вычисляя $\sqrt{2}$ с недостатком сначала с точностью до 0,1, затем с точностью до 0,01, затем с точностью до 0,001 и продолжая это вычисление неограниченно, мы получим бесконечную числовую последовательность:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142,\ \ldots,$$

дающую приближённое значение $\sqrt{2}$ с возрастающей степенью точности.

Для этой последовательности нельзя указать простого правила, по которому можно было бы получить новые её члены, зная предыдущие, но всё же можно определить любой член этой последовательности. Так, чтобы получить 4-й её член, нужно вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,0001, для получения 5-го члена нужно вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,00001 и т. д.

Допустим, что члены данной бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ по мере повышения их номера неограниченно приближаются к некоторому числу A. Это значит следующее: существует некоторое число A такое, что, какое бы малое положительное число q мы ни взяли, в данной последовательности можно отыскать член, начиная с которого все члены последовательности по абсолютной величине отличаются от A меньше, чем на q. Мы будем это свойство коротко выражать так: абсолютная величина разности $a_n - A$ неограниченно убывает с возрастанием номера n.

В этом случае число A называется пределом данной бесконечной числовой последовательности. Приведём пример такой последовательности. Составим последовательность десятичных дробей:

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ \ldots\ .$$

Здесь каждый член получается из предыдущего приписыванием нового десятичного знака 9.

Легко заметить, что члены этой последовательности неограниченно приближаются к единице.

Именно, первый член отличается от единицы на 0,1, второй на 0,01, третий на 0,001, и если достаточно продолжить эту последовательность, то можно найти в ней член, начиная с которого все последующие члены будут отличаться от единицы на сколь угодно малую, заранее указанную величину. Следовательно, мы можем сказать, что взятая нами бесконечная числовая последовательность имеет пределом единицу. Другим примером числовой последовательности, имеющей предел, служит последовательность приближённых значений длины отрезка, несоизмеримого с единицей длины, вычисленных с недостатком, сначала с точностью до 0,1, затем— до 0,01, затем — до 0,001 и т. д.

Пределом этой последовательности служит бесконечная десятичная дробь, представляющая точную меру длины данного отрезка. В самом деле, величина бесконечной десятичной дроби заключена между двумя её приближёнными значениями, вычисленными с одинаковой точностью — одно с недостатком, другое с избытком.

Как было показано выше, эта разность неограниченно убывает по мере повышения степени точности приближённых значений. Следовательно, должна неограниченно убывать и разность между самой бесконечной десятичной дробью и её приближёнными значениями по мере повышения степени точности этих значений. Значит, бесконечная десятичная дробь служит пределом последовательности всех её приближённых значений, взятых с недостатком (или всех приближённых значений, взятых с избытком).

Легко заметить, что не всякая бесконечная последовательность имеет предел; например, натуральный ряд чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

очевидно, никакого предела не имеет, так как его члены неограниченно возрастают и ни к какому числу не приближаются.

14. (228.) Теорема. ***Всякая бесконечная числовая последовательность может иметь только один предел.***

В справедливости этой теоремы легко убедиться доказательством от противного. В самом деле, предположим, что дана последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

которая имеет два различных предела A и B. В таком случае, в силу того, что A есть предел данной последовательности, абсолютная величина разности $a_n - A$ должна неограниченно убывать с возрастанием n. В силу того, что B есть тоже предел данной последовательности, абсолютная величина разности $a_n - B$ также должна неограниченно убывать с возрастанием n.

Но в таком случае абсолютная величина разности

$$(a_n - A) - (a_n - B)$$

должна также или неограниченно убывать, или быть равной нулю. Но эта последняя разность равна разности чисел $B - A$ и, следовательно, есть некоторое вполне определённое, отличное от нуля число. Это число не зависит от номера n и при возрастании n вовсе не изменяется. Таким образом, предположение, что существуют два предела числовой последовательности, привело нас к противоречию.

15. (229.) Предел возрастающей бесконечной числовой последовательности. Рассмотрим такую последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., в которой каждый следующий член больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$, и в то же время все члены последовательности меньше некоторого определённого числа M, т. е. для любого номера n $a_n < M$.

В этом случае последовательность имеет определённый предел. (Теорема Вейерштрасса.)

16. (231.) Предел переменной величины. Если дана последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

то n-й член её a_n можно назвать *переменной величиной*, числовое значение которой зависит от её номера n. Этим выражением «переменная величина» часто пользуются для упрощения речи. Так, вместо выражения «дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...» принято говорить «дана переменная величина a_n, принимающая последовательно ряд значений a_1, a_2, a_3, ...». Если пользоваться этим способом выражения, то можно говорить не о пределе последовательности, а о пределе переменной величины.

В таком случае, предложение, доказанное в § 14 (228), можно высказать в форме: «Всякая переменная величина может стремиться лишь к одному пределу». Это предложение часто высказывают так: «Если даны две переменные величины a_n и b_n, причём все значения первой равны соответствующим значениям второй: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$, ..., то предел первой величины, конечно, если он существует, равен пределу второй», или короче: «Если две переменные величины равны, то равны и их пределы».

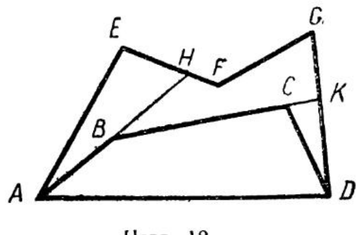
Предложение (§ 15) о пределе возрастающей числовой последовательности можно высказать так: *если переменная величина a_n возрастает с возрастанием номера n и в то же время остается меньше некоторого постоянного числа, то эта переменная величина имеет предел.*

Длина окружности.

17. (232.) Понятие о пределе даст возможность точно определить, что мы подразумеваем под длиной окружности. Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1. ***Выпуклая ломаная*** (*ABCD*, черт. 18) ***меньше всякой другой ломаной*** (*AEFGD*), ***объемлющей первую.***

Выражения «объемлющая ломаная», «объемлемая ломаная» имеют следующий смысл. Пусть две ломаные (как те, которые изображены у нас на чертеже) имеют одни и те же концы *A* и *D* и расположены таким образом, что одна ломаная (*ABCD*) вся лежит внутри многоугольника, образованного другой ломаной и отрезком *AD*, соединяющим концы *A* и *D*; тогда внешняя ломаная называется объемлющей, а внутренняя ломаная — объемлемой.



Черт. 18

Предстоит доказать, что объемлемая ломаная $ABCD$ (если она выпуклая) короче всякой объемлющей линии $AEFGD$ (всё равно — выпуклой или невыпуклой), т. е. что

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

Продолжим стороны выпуклой ломаной так, как указано на чертеже. Тогда, приняв во внимание, что отрезок прямой меньше всякой ломаной, соединяющей концы отрезка, мы можем написать следующие неравенства:

$$AB + BH < AE + EH;$$
$$BC + CK < BH + HF + FG + GK;$$
$$CD < CK + KD.$$

Сложим почленно все эти неравенства и затем от обеих частей полученного неравенства отнимем вспомогательные отрезки BH и CK; далее, заменив сумму $EH + HF$ отрезком EF и сумму $GK + KD$ — отрезком GD, получим то неравенство, которое требовалось доказать.

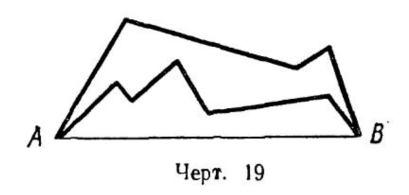
Замечание. Если бы объемлемая линия не была выпуклой (черт. 19), то изложенное доказательство нельзя было бы применить. В этом случае объемлемая ломаная может оказаться и больше объемлющей.

18. (233.) Лемма 2. ***Периметр выпуклого многоугольника*** ($ABCD$) ***меньше периметра всякого другого многоугольника*** ($MNPQRL$), ***объемлющего первый*** (черт. 20).

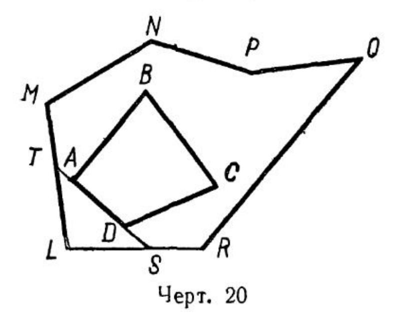
Требуется доказать, что

$$AB + BC + CD + DA < LM + MN + NP + PQ + QR + RL.$$

Продолжив в обоих направлениях одну какую-нибудь сторону AD выпуклого многоугольника, применим к ломаным линиям $ABCD$



Черт. 19



Черт. 20

и $ATMNPQRSD$, соединяющим точки A и D, лемму предыдущего параграфа; получим неравенство:

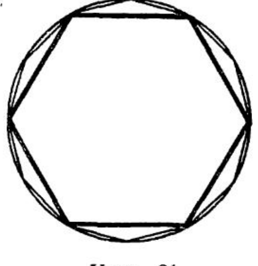
$$AB + BC + CD < AT + TM + MN + NP +$$
$$+ PQ + QR + RS + SD.$$

С другой стороны, так как отрезок ST меньше ломаной SLT, то можем написать:

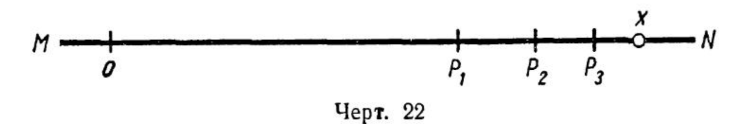
$$TA + AD + DS < TL + LS.$$

Сложим почленно эти два неравенства и отнимем от обеих частей вспомогательные отрезки AT и DS; далее, заменив сумму $TL + TM$ отрезком LM и сумму $LS + RS$ отрезком LR, получим то, что требовалось доказать.

19. (234.) Определение длины окружности. Впишем в данную окружность (черт. 21) правильный многоугольник, например шестиугольник, и на какой-нибудь прямой MN (черт. 22) отложим отрезок OP_1, равный периметру этого шестиугольника (на нашем чертеже периметр изображён по недостатку свободного места в уменьшенном виде). Удвоим теперь число сторон вписанного шестиугольника, т. е. вместо шестиугольника возьмём правильный вписанный 12-угольник. Найдём также его периметр и отложим его на той же прямой MN от той же точки O; пусть тогда получится отрезок OP_2, который должен быть больше OP_1, так как вместо каждой стороны шестиугольника мы теперь берём ломаную (из двух сторон 12-угольника), которая длиннее прямой. Удвоим снова число сторон вписанного 12-угольника, т. е. возьмём теперь правильный 24-угольник (на чертеже он не указан), найдём его периметр и отложим его на MN от той же точки O; мы получим тогда отрезок OP_3, который будет больше OP_2 по той же причине, по какой OP_2 больше OP_1.


Черт. 21

Вообразим, что такой процесс удвоения и откладывания периметров продолжается всё далее и далее. Тогда мы получим бесконечную последовательность периметров OP_1, OP_2, OP_3, ..., которая является возрастающей последовательностью. Однако возрастание



Черт. 22

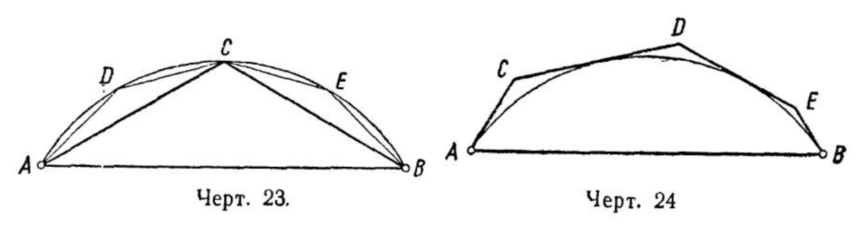
это не может быть неограниченным, так как периметр всякого вписанного многоугольника (выпуклого), каково бы ни было число его сторон, всегда остаётся меньше периметра любого описанного многоугольника (как его объемлющего). Вследствие этого полученная последовательность периметров правильных вписанных многоугольников имеет определённый предел (§ 15). Этот предел и принимают за длину окружности. Таким образом, мы принимаем следующее о п р е д е л е н и е: *за длину окружности принимается тот предел, к которому стремится (приближается) переменный периметр правильного многоугольника, вписанного в эту окружность, когда число сторон его неограниченно удваивается.*

З а м е ч а н и е. Можно доказать (мы опускаем это доказательство), что предел этот не зависит от того, с какого многоугольника мы начинаем

удвоение. Более того, можно доказать, что если даже вписанные многоугольники и не будут правильные, все же периметры их стремятся к тому же самому пределу, как и периметры правильных многоугольников, лишь бы только стороны их неограниченно уменьшались (и, следовательно, число сторон их неограниченно увеличивалось) путём ли удвоения, как мы это предполагали для правильных многоугольников, или по какому-нибудь иному закону (мы опускаем это доказательство).

Таким образом, для каждой окружности существует свой единственный предел, к которому стремится периметр вписанного выпуклого многоугольника, когда стороны его неограниченно уменьшаются; предел этот и принимается за длину окружности.

Равным образом за длину какой-нибудь дуги окружности AB (черт. 23) принимается предел, к которому стремится переменный



Черт. 23. Черт. 24

периметр ломаной линии, вписанной в эту дугу и имеющей с ней одни и те же концы, когда число сторон ломаной неограниченно удваивается.

20. (235.) Допущения. Для простоты изложения мы примем без доказательства следующие, почти очевидные, предложения:

Длина дуги окружности: 1) *больше стягивающей ее хорды*, *но* 2) *меньше периметра всякой ломаной линии, описанной около этой дуги и имеющей с ней одни и те же концы* (черт. 24).

21. Нахождение длины окружности. Для этой цели можно воспользоваться формулой, выражающей сторону (a_n) правильного n-угольника через радиус (R) описанного круга:

$$a_n = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Тогда периметр n-угольника (P_n) можно выразить в виде формулы:

$$P_n = a_n n = 2R\,n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Пользуясь семизначными таблицами синусов углов, найдём

$P_6 = 2R \cdot 6 \sin 30^\circ = 2R \cdot 3.$

$P_{12} = 2R \cdot 12 \sin 15^\circ = 2R \cdot 3{,}10582...$

$P_{24} = 2R \cdot 24 \sin 7^\circ 30' = 2R \cdot 3{,}13262...$

$P_{48} = 2R \cdot 48 \sin 3^\circ 45' = 2R \cdot 3{,}13935...$

$P_{96} = 2R \cdot 96 \sin 1^\circ 52' 30'' = 2R \cdot 3{,}14103...$

$P_{192} = 2R \cdot 192 \sin 56' 15'' = 2R \cdot 3{,}14145...$

$P_{384} = 2R \cdot 384 \sin 28' 7'',5 = 2R \cdot 3{,}14156....$

При каждом последующем удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника мы получаем последовательность значений произведения $2Rn \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$. Каждый последующий член этой последовательности больше предыдущего и в то же время каждый её член меньше некоторого определённого числа. Эта последовательность, как показано в § 19 (234), имеет предел, который и принимают за длину окружности. Таким образом, периметр правильного вписанного многоугольника даёт приближённое значение длины окружности, причём по мере продолжения процесса удвоения числа сторон этого многоугольника точность значения возрастает.

22. (238.) Отношение длины окружности к диаметру. Рассматривая процесс нахождения длины окружности, можно заметить, что число, на которое нужно умножить диаметр, чтобы получить длину окружности, не зависит от величины самого диаметра, так что если мы нашли, что длина какой-нибудь окружности равна её диаметру, умноженному на некоторое число, то и длина всякой другой окружности будет равна её диаметру, умноженному на то же самое число.

В самом деле, возьмём две окружности: одну радиуса R, другую радиуса r. Длину первой окружности обозначим через C, длину второй — через c. Впишем в каждую из них правильный многоугольник с одним и тем же числом сторон и будем удваивать число сторон каждого из этих многоугольников.

Обозначим через P_n переменный периметр правильного многоугольника, вписанного в первую окружность, и через p_n переменный периметр правильного многоугольника с тем же числом сторон, вписанного во вторую окружность.

На основании формулы $P_n = 2Rn \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$, данной в § 21, мы можем написать: $\frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}$.

Переменный периметр P_n имеет пределом длину C первой окружности. Переменный периметр p_n имеет пределом длину c второй окружности. А потому из равенства $\frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}$ вытекает $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$ (§ 14 и 16). Таким образом, мы можем сказать, *что отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное для всех окружностей*.

Это постоянное число принято обозначать греческой буквой π[1].

Мы можем, таким образом, для длины C окружности написать такую формулу:

$$C = 2R \cdot \pi, \text{ или } C = 2\pi R.$$

---

[1] Обозначение это введено, по всей вероятности, в XVII столетии. Буква π (пи) есть начальная буква греческого слова περιφέρεια (окружность).

Доказано, что число π является числом иррациональным, и, значит, оно не может быть выражено точно никаким рациональным числом. Но его приближённые значения можно находить различными способами с какой угодно точностью. Приняв периметр вписанного 96-угольника за приближённую длину окружности, мы получим для π приближённое значение 3,14 с недостатком и с точностью до 0,01. Эта точность для практических целей часто бывает достаточна. Для более точных вычислений можно брать $\pi \approx 3,14159$.

Пользуясь современными вычислительными машинами, нашли более 3000 знаков числа π.

Полезно заметить, что ещё в III веке до начала нашей эры знаменитый сиракузский геометр Архимед нашёл для π очень простое число $^{22}/_7$, т. е. $3^1/_7$. Это число несколько более π и разнится от него менее чем на 2 тысячных.

При решении геометрических задач часто встречается число, обратное числу π, т. е. равное дроби $\frac{1}{\pi}$. Полезно запомнить несколько цифр этого числа:

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098...$$

23. (239.) Длина дуги, содержащей *n* градусов. Длина окружности есть $2\pi R$, значит, длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$; следовательно, длина s дуги, содержащей $n°$, выразится так:

$$s = \frac{\pi R n}{180}.$$

Если дуга выражена в минутах (n') или в секундах (n''), то длина её определяется соответственно формулами:

$$s = \frac{\pi R n}{180 \cdot 60}, \text{ или } s = \frac{\pi R n}{180 \cdot 60 \cdot 60},$$

где n — число минут или секунд.

24. (240.) Задача. *Вычислить с точностью до 1 мм радиус такой окружности, дуга которой, содержащая* 81°21′36″, *равна* 0,452 *м.*

Обратив 81°21′36″ в секунды, получим число 292 896.

Из уравнения

$$0,452 = \frac{\pi R \cdot 292\,896}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

находим:

$$R = \frac{0,452 \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{292\,896\,\pi} = \frac{1}{\pi} = 0,318 \ (м).$$

25. (241.) Задача. *Определить число градусов дуги, длина которой равна радиусу.*

Заменив в формуле, определяющей длину дуги в n°, величину s на R, получим уравнение:

$$R = \frac{\pi R n}{180^\circ}, \text{ или } l = \frac{\pi n}{180^\circ},$$

откуда

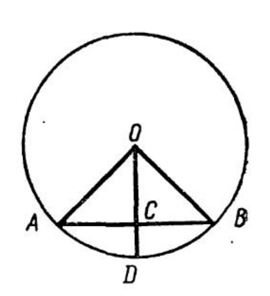
$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \cdot \frac{1}{\pi} = 180^\circ \cdot 0{,}3183098 = 57^\circ{,}295764 = 57^\circ 17' 44'', 8.$$

Заметим, что дуга, равная радиусу, называется радианом.

ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ.

26. (262.) Лемма. ***При неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его может сделаться как угодно малой.***

Пусть n есть число сторон правильного вписанного многоугольника и p — его периметр; тогда длина одной стороны этого многоугольника выразится дробью $\frac{p}{n}$. При неограниченном удвоении числа сторон многоугольника знаменатель этой дроби будет, очевидно, возрастать неограниченно, а числитель, т. е. p, хотя и будет возрастать, но не беспредельно (так как периметр всякого вписанного выпуклого многоугольника всегда остается меньшим периметра любого описанного многоугольника). Если же в какой-нибудь дроби знаменатель неограниченно возрастает, а числитель остаётся меньше некоторой постоянной величины, то дробь эта может сделаться как угодно малой. Значит, то же самое можно сказать о стороне правильного вписанного многоугольника: при неограниченном удвоении числа сторон она может сделаться как угодно малой.



Черт. 25

27. (263.) Следствие. Пусть AB (черт. 25) есть сторона правильного вписанного многоугольника, OA — радиус и OC — апофема. Из $\triangle\, OAC$ находим:

$$AO - OC < AC,$$

т. е.

$$AO - OC < \frac{1}{2} AB.$$

Но при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его, как мы сейчас доказали, может сделаться как угодно малой, значит, то же самое можно сказать и о разности $AO - OC$. Таким образом, при неограниченном

удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника *разность между радиусом и апофемой может сделаться как угодно малой*. Это же можно высказать другими словами так: при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника *предел, к которому стремится апофема, есть радиус*.

28. (264.) Площадь круга. Впишем в круг, радиус которого обозначим R, какой-нибудь правильный многоугольник. Пусть

площадь этого многоугольника будет q,
периметр » » » p,
апофема » » » a.

По формуле вычисления площади правильного многоугольника имеем:

$$q = \frac{1}{2} pa.$$

Вообразим теперь, что число сторон этого многоугольника неограниченно удваивается. Тогда периметр p и апофема a (следовательно, и площадь q) будут увеличиваться, причём периметр будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности, апофема будет стремиться к пределу, равному радиусу R круга. Из этого следует, что площадь многоугольника, увеличиваясь при удвоении числа сторон, будет стремиться к пределу, равному $\frac{1}{2} C \cdot R$. Предел этот принимается за численную величину площади круга. Таким образом, обозначив площадь круга буквой K, можем написать:

$$K = \frac{1}{2} C \cdot R,$$

т. е. *площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус*.

Так как $C = 2\pi R$, то

$$K = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2,$$

т. е. *площадь круга равна квадрату радиуса, умноженному на отношение длины окружности к диаметру*.

29. (265.) Следствие. *Площади кругов относятся, как квадраты радиусов или диаметров*.

Действительно, если K и K_1 будут площади двух кругов, а R и R_1 — их радиусы, то

$$K = \pi R^2 \text{ и } K_1 = \pi R_1^2,$$

откуда

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{4R_1^2} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}.$$

30. (266.) З а д а ч а 1. *Вычислить площадь круга, длина окружности которого равна 2 м.*

Для этого предварительно находим радиус R из равенства:

$2\pi R = 2$, откуда $R = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183 \ldots$.

Затем определим площадь круга:

$$K = \pi R^2 = \pi \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183 \ \ldots \ м^2.$$

31. (267.) З а д а ч а 2. *Построить квадрат, равновеликий данному кругу.*

Эта задача, известная под названием к в а д р а т у р ы к р у г а, не может быть решена при помощи циркуля и линейки. Действительно, если обозначим буквой x сторону искомого квадрата, а буквой R радиус круга, то получим уравнение:

$$x^2 = \pi R^2,$$

откуда

$$\pi R : x = x : R,$$

т. е. x есть средняя пропорциональная между полуокружностью и радиусом. Следовательно, если известен отрезок, длина которого равна длине полуокружности, то легко построить квадрат, равновеликий данному кругу, и, обратно, если известна сторона квадрата, равновеликого кругу, то можно построить отрезок, равный по длине полуокружности. Но с помощью циркуля и линейки нельзя построить отрезок, длина которого равнялась бы длине полуокружности; следовательно, нельзя в точности решить задачу о построении квадрата, равновеликого кругу. Приближённое решение можно выполнить, если предварительно найти приближённую длину полуокружности и затем построить среднюю пропорциональную между отрезком этой длины и радиусом.

32. (268.) Т е о р е м а. ***Площадь сектора равна произведению длины его дуги на половину радиуса.***

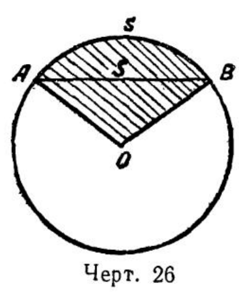
Пусть дуга AB (черт. 26) сектора AOB содержит $n°$. Очевидно, что площадь сектора, дуга которого содержит 1°, составляет $\frac{1}{360}$ часть площади круга, т. е. она равна $\frac{\pi R^2}{180}$. Следовательно, площадь S сектора, дуга которого содержит $n°$, равна:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2}.$$

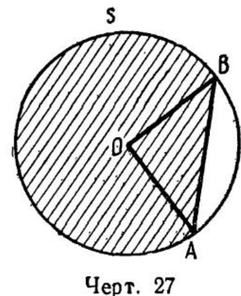
Так как дробь $\frac{\pi R n}{180}$ выражает длину дуги AB (§ 23), то, обозначив её буквой s, получим:

$$S = s \cdot \frac{R}{2}.$$

33. (269.) Площадь сегмента. Для нахождения площади сегмента, ограниченного дугой s и хордой AB, надо отдельно вычислить площадь сектора $AOBsA$ и площадь треугольника AOB. Затем из площади сектора $AOBsA$ вычесть площадь треугольника AOB, если дуга сегмента меньше 180°. Если же дуга сегмента больше 180°, то к площади сектора $AOBsA$ надо прибавить площадь треугольника AOB (черт. 26 и 27).



Черт. 26



Черт. 27

Задачи из § 15.

Длина окружности и дуги.

1. Вычислить длину окружности, если радиус равен: 1) 10 *м*; 2) 15 *м*; 3) 35 *см*.

2. Вычислить радиус, если длина окружности равна: 1) 1 *м*; 2) 25 *см*; 3) 4,75 *дм*.

3. Расстояние между серединами двух зубцов зубчатого колеса, имеющего 0,66 *м* в диаметре, равно 34,5 *мм*, считая по дуге. Сколько зубцов имеет колесо?

4. Шкив имеет в диаметре 1,4 *м* и делает 80 оборотов в минуту. Определить скорость точки, лежащей на окружности шкива.

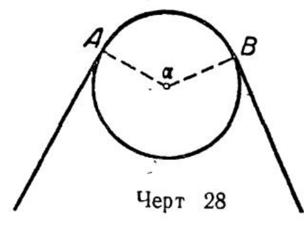
5. По данному радиусу R определить длину дуги, содержащей: 1) 45°; 2) 24°30′; 3) 5°14′15″.

6. Определить радиус дуги, если её длина равна l, а градусная мера: 1) 135°; 2) 10°40′.

7. Окружность шкива (черт. 28) имеет длину 540 *мм*, ремень касается шкива по дуге длиной 200 *мм*. Определить угол обхвата шкива ремнём (α).

8. Радиус железнодорожного закругления равен 1200 *м*; длина дуги равна 450 *м*. Сколько градусов содержит дуга?

9. 1) Окружность радиуса 2 *см* разогнута в дугу радиуса 5 *см*. Найти получившийся центральный угол.



Черт 28

2) Дуга радиуса 4 *см*, измеряющая центральный угол в 120°, равна длине некоторой окружности. Найти радиус этой окружности.

3) Окружность радиуса 6 *см* разогнута в дугу, измеряющую центральный угол в 300°. Найти радиус дуги.

10. Определить число градусов дуги, если дан её радиус R и длина l: 1) $R = 10$, $l = 45$; 2) $R = 15$, $l = 6$.

11. Сколько градусов и минут в дуге, длина которой равна радиусу $(\frac{1}{\pi} = 0{,}31831)$?

12. По данной хорде a определить длину её дуги, если она содержит: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

13. По данной длине дуги l определить её хорду, если дуга содержит: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

14. Определить радиус окружности, если она длиннее своего диаметра на 107 *см*.

15. 1) На сколько увеличится длина окружности, если радиус увеличится на m?

2) Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и футбольный мяч по его большому кругу. Далее, вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 *м*. Тогда обручи отстанут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, и останется некоторый прозор (промежуток). В каком случае этот прозор был бы больше: у земного шара или мяча?

16. 1) Железная труба со стенками толщиной в 6 *мм* имеет внешнюю окружность в 22 *см*. Найти длину внутренней окружности.

2) Из двух концентрических окружностей одна равна 167 *см*, а другая 117 *см*. Определить ширину кольца.

17. Определить длину окружности, если она более периметра правильного вписанного шестиугольника на 7 *см*.

18. Дуга сегмента содержит 120° и имеет длину l. Определить длину окружности, вписанной в этот сегмент.

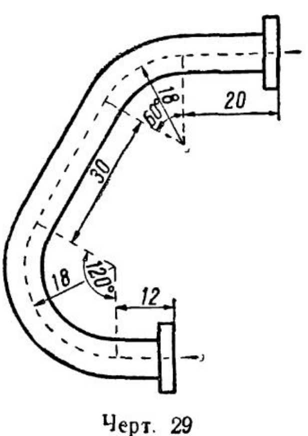
19. Из концов дуги ABC, содержащей 120°, проведены касательные до взаимного пересечения в точке D, и в полученную фигуру $ABCD$ вписана окружность. Доказать, что длина этой окружности равна длине дуги ABC.

20. На чертеже 29 даны вид и размеры в сантиметрах коленчатой трубы паровой машины. Найти её длину. (Её длина измеряется по средней пунктирной линии.)

21. Найти радиус такой окружности, длина и площадь круга которой выражаются одним и тем же числом.

22. Определить относительную погрешность при замене длины полуокружности $\frac{1}{2}C$ через $a_3 + a_4$ (для приближённого спрямления окружности).

23. Одно из приближённых спрямле-



Черт. 29

ний окружности состоит в том, что её заменяют периметром прямоугольного треугольника, у которого один катет равен $\frac{5}{6}$ диаметра, другой катет составляет $\frac{3}{5}$ диаметра. Определить абсолютную погрешность.

Площадь круга.

24. Определить площадь круга при следующей длине радиуса: 1) 10 *м*; 2) 4 *дм*; 3) 2,6 *см* (взять $\pi = 3,14$).

25. Определить радиус круга, если его площадь равна: 1) 2 *см*²; 2) 50 *м*²; 3) 17 *дм*².

26. Лошадь привязана к колу верёвкой, длина которой равна 10,5 *м*. Найти площадь участка, на котором она может пастись. (С точностью до 0,01 *кв. м.*)

27. Найти площадь круга поршня воздушного насоса, диаметр которого равен 10 *см*.

28. Поршень насоса имеет площадь сечения в 12,56 *см*². Найти диаметр поршня.

29. Дерево имеет 1,884 *м* в обхвате. Чему равна площадь его поперечного сечения, имеющего (приблизительно) форму круга?

30. Какой груз выдерживает пеньковый канат, имеющий 18 *см* в окружности, если допускаемая нагрузка равна 100 *кг/см*²?

31. 1) Определить площадь круга, если длина окружности равна 8 *см*.

2) Определить длину окружности, если площадь круга равна 18 *см*².

32. 1) Пропускная способность трубы III (черт. 30) та же, что и у труб I и II вместе. Определить построением величину x по данным на чертеже размерам.

Черт. 30

2) Две трубы с диаметром в 6 *см* и в 8 *см* требуется заменить одной трубой той же пропускной способности Найти диаметр этой трубы.

33. Определить площадь круга, если площадь вписанного квадрата равна F.

34. Вычислить площадь круга, если она менее площади описанного квадрата на 4,3 *м*².

35. Найти отношение между площадями вписанного и описанного кругов: 1) для правильного треугольника; 2) для квадрата; 3) для правильного шестиугольника.

Площадь кольца.

36. Вертикальный цилиндрический котёл 78 *см* в диаметре и весящий 752 *кг* имеет в днище круглое отверстие, наружный диаметр которого равен 36 *см*. Всей площадью своего днища

котёл опирается на фундамент. Определить давление, оказываемое котлом вследствие его тяжести, на 1 $см^2$ поверхности фундамента.

37. В кольце, образованном двумя концентрическими окружностями, хорда большей окружности, касающаяся меньшей, равна a. Определить площадь кольца.

38. Круга касаются шесть равных ему кругов, касающихся также между собой, и полученное соединение семи равных кругов охвачено таким концентрическим кольцом, которое равновелико их сумме. Доказать, что ширина кольца равна радиусу кругов.

Сектор и сегмент.

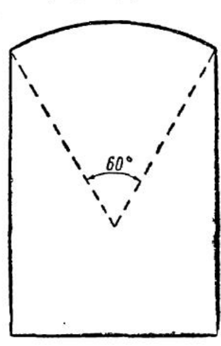
39. Определить площадь сектора, если радиус равен r, а дуга содержит: 1) 67°30′; 2) 15°45′.

40. Определить радиус сектора, если его площадь равна q, а центральный угол равен: 1) 72°; 2) 36′.

41. Радиус сектора равен r, а площадь равна q. Определить величину центрального угла (или дуги).

42. Определить площадь сегмента, если радиус равен R, а дуга содержит: 1) 90°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 30°.

43. Определить площадь сегмента, если хорда равна a, а дуга содержит: 1) 120°; 2) 90°; 3) 60°.



Черт. 31

Площадь фигур, ограниченных прямыми и дугами окружностей.

44. Определить площадь окна (черт. 31), имеющего форму прямоугольника, законченного вверху дугой круга в 60°; высота окна, считая от середины дуги до основания, равна 2,4 *м*, ширина его 1,6 *м*.

45. 1) Полуокружность радиуса r разделена на три равные части, и точки деления соединены с концом диаметра. Определить площадь средней части полукруга.

2) Концы дуги CD одинаково удалены соответственно от концов диаметра AB. Определить площадь, заключённую между дугой CD и хордами AC и AD, если площадь круга равна Q и дуга CD содержит $n°$.

46. В круге радиуса R проведены по одну сторону центра две параллельные хорды, из которых одна стягивает дугу в 120°, а другая — в 60°. Определить часть площади круга, заключённую между хордами.

47. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и стягивает в одном круге дугу в 60°, а в другом — дугу в 90°. Определить площадь общей части кругов (два случая).

48. Площадь круга Q. Определить площадь вписанного в него прямоугольника, стороны которого относятся, как $m : n$.

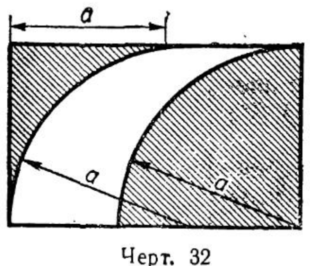
49. В круг радиуса R вписан прямоугольник, площадь которого

составляет половину площади круга. Определить стороны этого прямоугольника.

50. Около круга, площадь которого равна Q, описан ромб с углом в 30°. Определить площадь этого ромба.

51. Около правильного треугольника с площадью Q описана окружность, и в тот же треугольник вписана окружность. Определить площадь кольца, заключённого между этими окружностями.

52. AMB — дуга, содержащая 120°; OA и OB — радиусы; AC и BC — касательные; DME — дуга, описанная из центра C между C и ACB и касающаяся дуги AMB. Найти отношение между площадями секторов $CDME$ и $OAMB$.



Черт. 32

53. Из концов дуги ACB проведены касательные до пересечения в точке D. Определить площадь $DACB$, заключённую между двумя касательными и дугой, если радиус равен R, а дуга содержит: 1) 90°; 2) 120°; 3) 60°.

54. Из центра равностороннего треугольника описана окружность, пересекающая его стороны так, что внешние дуги содержат по 90°. Обозначая сторону этого треугольника через a, определить площадь, ограниченную внутренними дугами и средними отрезками сторон.

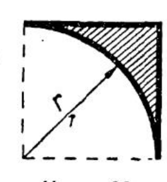
55. 1) Во сколько раз увеличится площадь круга, если диаметр его увеличить в 3 раза? Во сколько раз площадь уменьшится, если радиус уменьшить в 5 раз?

2) Во сколько раз надо уменьшить радиус круга, чтобы площадь уменьшилась в 4 раза? Во сколько раз надо увеличить диаметр круга, чтобы площадь увеличилась в 5 раз?

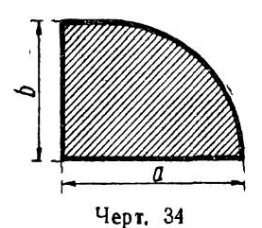
56. Можно ли водопроводную трубу диаметром в 50 *мм* заменить двумя трубами диаметром в 25 *мм* каждая? Одинакова ли площадь сечения одной большой трубы и двух малых?

57. Вычислить площадь заштрихованной части прямоугольника, данного на чертеже 32.

58. Определить площадь фигур, заштрихованных на чертежах 33—36, по данным размерам.



Черт. 33

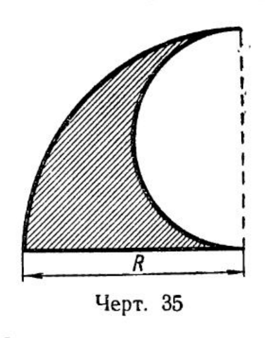


Черт. 34

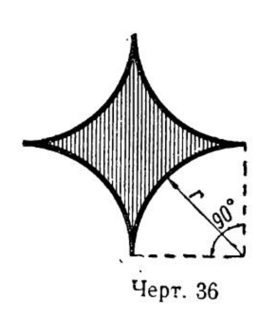
59. Два равных полукруга наложены так, что диаметры их параллельны, а полуокружность одного проходит через центр другого. Определить площадь общей части полукругов по данному их радиусу R.

60. На каждой стороне квадрата, принятой за диаметр, описана полуокружность, лежащая внутри квадрата. Определить площадь полученной розетки, если стороны квадрата равны a.

61. На сторонах ромба описаны, как на диаметрах, полуокружности, обращённые внутрь. Диагонали ромба равны a и b. Определить площадь полученной розетки.



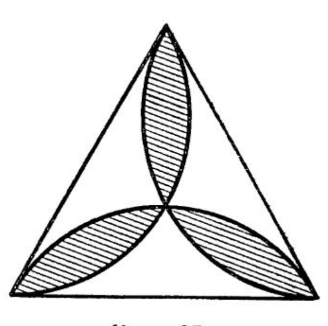
Черт. 35

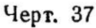


Черт. 36

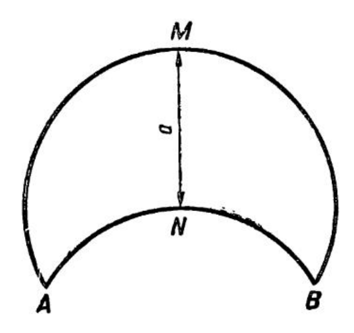
62. Диаметр разделён на равные части, из обоих его концов проведены полуокружности во все точки деления, причём из одного конца все полуокружности сверху, а из другого все снизу. Доказать, что полученными изогнутыми линиями круг разделился на части равной величины, а периметр каждой части равен длине окружности.

63. В равностороннем треугольнике проведены дуги между каждыми двумя вершинами через центр треугольника (черт. 37).





Черт. 37



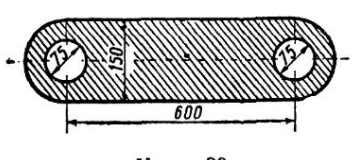
Черт. 38

Сторона треугольника равна a. Определить площадь полученной розетки.

64. Между точками A и B проведены две дуги, обращённые выпуклостью в одну сторону: дуга AMB содержит 240°, а дуга ANB 120°. Расстояние между серединами этих дуг равно a. Определить площадь луночки (черт. 38).

65. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра. Из точки D, как из центра, радиусом DA описана дуга AMB. Доказать, что луночка $AMBC$ равновелика треугольнику ABD.

66. Из точки C данной полуокружности опущен перпендикуляр CD на диаметр AB, и на отрезках AD и DB построены новые полуокружности по одну сторону с данной. Доказать, что площадь, заключённая между тремя полуокружностями, равна площади круга с диаметром CD.

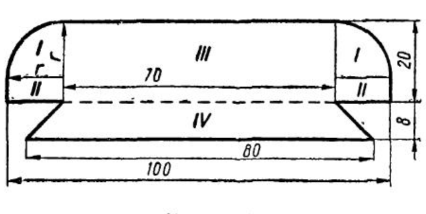


Черт. 39

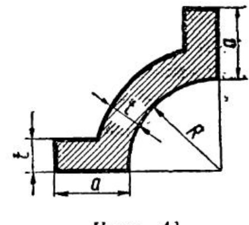
67. Вычислить площадь фигуры, заштрихованной на чертеже 39. Размеры даны в миллиметрах.

68. Вычислить площадь сечения, изображённого на чертеже 40. Размеры даны в миллиметрах.

69. Определить площадь поперечного сечения детали, показанного на чертеже 41.



Черт. 40



Черт. 41

70. Две параллельные хорды равны 15 *м* и 40 *м*, а расстояние между ними 39 *м*. Определить площадь круга.

71. Определить радиус круга, вписанного в данный сектор, если радиус сектора равен R, а дуга содержит α градусов [α равно: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°].

К задачам из § 8.

17. 1) $AD = 8$ *м* и $DC = 12$ *м*; 2) 10 *м*; 3) 1,8 *м*. **18.** 10 *см*. **20.** $BE = 7$ *см*; $EC = 5$ *см*. **21.** 39 *см* и 65 *см*. **22.** 8 *см*. **23.** 50 *см*. **24.** 16 *см*, 20 *см*, 20 *см*. **25.** $BE = 10$ *м*, $EC = 14$ *м*. **26.** $\frac{b}{a+c}$. **27.** 6 *см*, 4 *см* и 6 *см* **28.** $\frac{ab}{a+b}$.

К задачам из § 10.

1. 1) 37 *см*; 2) 65 *см*; 3) 41 *дм*; 4) 109 *см*; 5) $21\frac{1}{4}$; 6) $1\frac{9}{16}$; 7) 17; 8) $\sqrt{61} \approx 7{,}81$. **2.** 1) 161; 2) 260; 3) 24; 4) 42; 5) $7\frac{1}{5}$; 6) $\sqrt{51} \approx 7{,}14$.

3.

	a	b	c	a_c	b_c	h
1)	(15)	(20)	25	9	16	12
2)	(24)	(7)	25	$23\frac{1}{25}$	$1\frac{24}{25}$	$6\frac{18}{25}$
3)	(4)	(5)	$\sqrt{41}$	$\frac{16}{41}\sqrt{41}$	$\frac{25}{41}\sqrt{41}$	$\frac{20}{41}\sqrt{41}$
4)	(100)	75	(125)	80	45	60
5)	156	(65)	(169)	144	25	60
6)	(600)	175	(625)	576	49	168
7)	(6)	8	10	(3,6)	6,4	4,8
8)	24	(7)	25	23,04	(1,96)	6,72
9)	21	20	(29)	$\left(15\frac{6}{29}\right)$	$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
10)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	(3)	1	(2)	$\sqrt{2}$
11)	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$\left(1\frac{1}{2}\right)$	$\left(2\frac{2}{3}\right)$	2
12)	$2\sqrt{10}$	$6\sqrt{10}$	20	(2)	(18)	6
13)	(136)	255	289	64	225	(120)
14)	40	(9)	41	$39\frac{1}{41}$	$1\frac{40}{41}$	$\left(8\frac{32}{41}\right)$

4. *Указание*. Воспользоваться § 4. (190). **5.** *Указание*. Если разность отрезков $x - y = r$, а среднее пропорциональное $\sqrt{xy} = p$, то сумму отрезков можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами r и $2p$. **7.** 50 *см* и 72 *см*. **8.** 5,2 *м*. **9.** 18 *см*, 98 *см*. **12.** Воспользоваться задачей № 11. **13.** 3, 4, 5. **14.** $\sqrt{116} \approx 10{,}8$ (*м*). **15.** 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 109 *см*. **16.** $32\sqrt{2} \approx 45$ (*мм*). **17.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $2(\sqrt{2}+1)$ *см*. **18.** Нет. **19.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; 2) 32 *см* и 60 *см*. **20.** 1) 41 *см*; 2) 10 *см*. **21.** 1) 15 *см*; 2) 125 *см*, 125 *см*, 240 *см*; 3) $2\sqrt{2}$ *см*. **22.** $BD \approx 5{,}0$ *м*. **23.** 1) 3 *м* и 4 *м*; 2) 9 *см*, $1\frac{5}{7}$ *см*, $14\frac{2}{7}$ *см*. **24.** 1) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; 2) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$; 3) $2m(2 + \sqrt{3})$; 4) $2\sqrt{3}$ *см* и $4\sqrt{3}$ *см*. **25.** 1) 25 *см* или 11 *см*; 2) 29 *см*. 3) 40 *см*. **26.** 1) 37 *см*; 2) 3 *дм* и 4 *дм*. **27.** 1) 24 *см*; 2) 36 *см* и 54 *см*. **28.** Около 5630 *м*. **29.** 1) $D \approx 25$ *мм*; 2) $d \approx 19$ *мм*; 3) $h \approx 11$ *мм*; $D \approx d + \frac{2}{3}h\sqrt{3}$. **31.** 2) $\sqrt{a^2 + 3b^2}$. **32.** 24 *мм*. **33.** 1) 39 *дм*; 2) 80 *см*; 3) 14 *см* или 4 *см*; 4) 21 *см*; 5) 6 *см*. **34.** 1) $D = 425$ *мм*; 2) $D = \frac{l^2+4s^2}{4s}$. **35.** $\frac{a^2+4h^2}{8h}$. **36.** 9 *см* или 39 *см*. **37.** 42,5 *см*. **38.** 1) 77 *см*; 2) 61 *см*; 3) 13,44 *см*. **39.** $y = \sqrt{2Rr}$. **40.** 1) 40 *см*; 2) внешняя касательная равна 48 *см*; внутренняя касательная равна 30 *см*. **41.** 13 *м*. **42.** 73 *см*. **43.** 7 *м* и 25 *м*. **44.** $7\frac{9}{17}$ *см*. **45.** 175 *см* и 600 *см*. **46.** 20 *см*. **47.** 1 : 4. **48.** 49 : 81. **49.** 21 *см* и 28 *см*. **50.** $a(\sqrt{2}-1)$ и $a(2-\sqrt{2})$. **51.** $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ и $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. **52.** 1 *м*. **53.** 15 *см*. **54.** 5 *м*. **55.** 1) 10 *см*; 2) 7,5 *см*. **56.** 18 *дм*. **57.** 1) 24 *дм*; 2) $2{,}4\sqrt{5}$ *дм*; $1{,}8\sqrt{5}$ *дм*; 3) 13,44 *дм*. **58.** 1) $9\frac{1}{15}$ *см*; 2) $0{,}8\,r\sqrt{5}$. **59.** 15 *дм*. **60.** 65 *дм*. **61.** 35 *дм*.

Указание. Провести среднюю линию и высоту из вершины тупого угла. **62.** $AE : EC = 16 : 25$. **63.** 36 *дм*, 48 *дм*. **64.** 18 *дм* и 80 *дм*. **65.** 1) 37 *м* и $\sqrt{769} \approx 27{,}7$ (*м*); 2) 4 : 5. **66.** 1) 3,125 *дм*; 2) 16,9 *м*. **67.** 6 *дм*. *Указание*. Отрезки гипотенузы, образуемые точкой касания, равны прилежащим к ним отрезкам катетов. **68.** 38 *дм* и 22 *дм*. **69.** 25 *дм*. *Указание*. Ввести вспомогательное неизвестное — расстояние от центра до одной из хорд. **70.** 30 *см*. **71.** 32 *см* и 18 *см*.

72. Основания: $\frac{2mr}{\sqrt{mn}}$ и $\frac{2nr}{\sqrt{mn}}$; боковая сторона $\frac{(m+n)r}{\sqrt{mn}}$. **73.** 20 *дм*. **74.** 1 *дм*. **75.** $CA = \frac{m^2+n^2}{m} = 39$; $CB = \frac{m^2+n^2}{n} = 26$. *Указание.* Соединить концы отрезков m и n с основанием перпендикуляра. **76.** 27 *дм* и 64 *дм*. **77.** *Указание.* Выразить длину общей внешней касательной через радиусы. **78.** $AB = \sqrt{a(a+b)}$; $CD = \sqrt{b(a+b)}$.

К задачам из § 11.

1. $AB \approx 13$ *м*. **2.** $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ (*м*). **3.** 1) 6 *см*, 12 *см*, 1 *м*; 2) 16 *см*. **4.** 1) Внутри круга; 2) на окружности; 3) вне круга. **5.** 1) 4; 2) 65; 3) $\frac{r}{5}$; 4) 5 или 45. **6.** 1) 30 *см*; 2) 40 *см*; 3) 21 *дм* и 29 *дм*. **10.** 1) 1 *м*; 2) 6 *см*; 3) 10 *м*. **11.** 1) 8 *см*; 2) 18 *м*; 3) 14 *см*. **12.** 1) 7 *см*; 2) $r(\sqrt{5}-1) \approx 1{,}24r$. **13.** 12 *см*. **14.** $R = 4{,}35$ *м*. **15.** Нет. **16.** 43,6 *см*. **17.** $R = 591$ *м*. **18.** Уменьшился в $2\frac{1}{2}$ раза. **19.** 1) 24 *см*; 2) 33 *м*. **20.** 24 *см* и 8 *см*. **21.** Увеличилась в 3 раза. **22.** 1) 4 *см*; 2) 20 *м*; 3) $AB = 35$ *м* и $AC = 15$ *м*. **23.** 8 *см*. **24.** 1) 9 *дм*; 2) 36 *см*; 3) 25. **25.** mx и nx, где $x = \frac{am - bn}{n^2 - m^2}$. **26.** 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$. **27.** 21 *см*. **28.** В $1\frac{1}{2}$ раза. **30.** Вторая точка пересечения. **31.** 1) 3 *см*; 2) 18 *см*; 3) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. **32.** 1) 226 *км*; 2) 270 *км*. **33.** 1) 17 *см*; 2) 13 *см*. **34.** 1) 10 *см*; 2) $\frac{a}{2}$. **35.** 18 *см*. **36.** 12 *см* и 36 *см*. **37.** 1) 18 *см* и 12 *см*. 2) 9 *см* и 6 *см* или $12\frac{1}{2}$ *см* и $2\frac{1}{2}$ *см*. **40.** 6 *дм*. **41.** $\frac{2}{5}r$. **42.** 1) 10 *см*; 2) 8 *дм*; 3) 9,375 *м*. **43.** 25 *дм*, 8 *дм*, 15 *дм*. **44.** $\frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}$. **45.** 9 *дм*. **46.** $\sqrt{2ar}$.

К задачам из § 15.

1. 1) $\approx 62{,}8$ *м*; 2) $\approx 94{,}2$ *м*; 3) ≈ 220 *см*. **2.** 1) ≈ 16 *см*; 2) $\approx 4{,}0$ *см*; 3) $\approx 0{,}76$ *дм*. **3.** 60. **4.** $\approx 5{,}9\ \frac{м}{сек}$. **5.** 1) $\frac{\pi R}{4}$; 2) $\frac{49\pi R}{360}$; 3) $\frac{419\pi R}{14400}$. **6.** 1) $\frac{4l}{3\pi}$; 2) $\frac{135l}{8\pi}$. **7.** 133°20′. **8.** $\approx 21°{,}5$. **9.** 1) 144°; 2) $1\frac{1}{3}$ *см*; 3) 7,2 *см*. **10.** $x = \frac{180° l}{\pi R}$; 1) $\frac{810°}{\pi}$; 2) $\frac{72°}{\pi}$. **11.** $\approx 57°18'$. **12.** 1) $\frac{\pi a}{3} \approx 1{,}05a$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}11a$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9} \approx 1{,}21a$. **13.** 1) $\frac{3l}{\pi} \approx 0{,}95l$;

2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi} \approx 0,90l$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,83l$. **14.** 25 *см*. **15.** 1) $2\pi m$; 2) прозор и для земного шара и для мяча один и тот же и равен $\frac{1}{2\pi} \approx 0,16$ (*м*).
16. 1) ≈ 182 *мм*; 2) $\approx 8,0$ *см*. **17.** $50\pi \approx 157$ (*см*). **18.** $\frac{3}{4}l$. **20.** ≈ 119 *см*.
21. 2. **22.** $\approx 0,15\%$. **23.** $\approx 0,00005\ D$. **24.** 1) ≈ 314 *м*²; 2) $\approx 50,2$ *дм*²; 3) $\approx 21,2$ *см*². **25.** 1) $\approx 0,8$ *см*; 2) ≈ 4 *м*; 3) $\approx 2,3$ *дм*. **26.** $\approx 346,28$ *м*². **27.** $\approx 78,5$ *см*². **28.** ≈ 4 *см*. **29.** $\approx 0,2826$ *м*². **30.** $\approx 2,6$ *т*. **31.** 1) $\approx 5,1$ *см*²; 2) ≈ 15 *см*. **32.** 10 *см*. **33.** $\frac{\pi F}{2}$.
34. $\approx 15,7$ *м*². **35.** 1) 1:4; 2) 1:2; 3) 3:4. **36.** $\approx 0,2\ \frac{кг}{см^2}$. **37.** $\frac{\pi a^2}{4}$.
39. 1) $\frac{3}{16}\pi r^2$; 2) $\frac{7}{160}\pi r^2$. **40.** 1) $\sqrt{\frac{5q}{\pi}}$; 2) $\sqrt{\frac{600q}{\pi}}$. **41.** $360° \cdot \frac{q}{\pi r^2}$.
42. 1) $\frac{R^2}{4}(\pi - 2) \approx 0,275R^2$; 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,09R^2$; 3) $\frac{R^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2}) \approx 0,04R^2$; 4) $\frac{R^2}{12}(\pi - 3) \approx 0,01R^2$. **43.** 1) $\frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,20a^2$; 2) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2) \approx 0,14a^2$; 3) $\frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,09a^2$.
44. $\approx 3,7$ *м*². **45.** 1) $\frac{1}{6}\pi r^2 \approx 0,5r^2$; 2) $\frac{Qn}{360}$. **46.** $\frac{\pi R^2}{6}$. **47.** $\frac{a^2}{24}(7\pi - 6 - 6\sqrt{3}) \approx 0,23a^2$ или $\frac{a^2}{24}(13\pi + 6 - 6\sqrt{3}) \approx 1,52a^2$. **48.** $\frac{4Qmn}{\pi(m^2 + n^2)}$.
49. $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}) \approx 1,8R$ и $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi}) \approx 0,87R$. **50.** $\frac{8Q}{\pi} \approx 2,55Q$. **51.** $\frac{\pi Q\sqrt{3}}{3} \approx 1,82Q$. **52.** 1 : 2.
53. 1) $\frac{R^2}{4}(4 - \pi) \approx 0,215R^2$; 2) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi) \approx 0,68R^2$; 3) $\frac{R^2}{6}(2\sqrt{3} - \pi) \approx 0,05R^2$. **54.** $\frac{a^2}{24}(\pi + 6) \approx 0,38a^2$. **55.** 1) В 9 раз, в 25 раз; 2) в 2 раза, в $\sqrt{5} \approx 2,236$ раза. **56.** Нет, надо 4 такие малые трубы. **57.** a^2. **58.** 1) $\approx 0,215r^2$; 2) $ab - 0,215b^2$; 3) $\approx 0,393R^2$; 4) $\approx 0,858r^2$. **59.** $\frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 1,23R^2$. **60.** $\frac{a^2}{2}(\pi - 2) \approx 0,57a^2$.
61. $\frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) - \frac{ab}{2}$. **63.** $\frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,18a^2$. **64.** $\frac{a^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1,9a^2$. **67.** ≈ 988 *см*². **68.** ≈ 25 *см*². **69.** $(1,57R + 2a)t - 1,215t^2$. **70.** 625π *м*². **71.** 1) $\frac{R}{3}$; 2) $R(\sqrt{2} - 1) \approx 0,4R$; 3) $R(2\sqrt{3} - 3) \approx 0,46R$.

СОДЕРЖАНИЕ

8 класс

9 класс

Андрей Петрович Киселёв
Николай Александрович Рыбкин

ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *Н. И. Никитина*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *В. В. Новосёлова*
Корректор *М. В. Голубева*

Подписано к печати с матриц 10/VII 1970 г. 60×90 1/16. Тип. № 3. Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,55. Тираж 1400 тыс. экз. Заказ 620.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 3 коп.